





# Universidad Juárez Autónoma de Tabasco

División Académica de Ciencias Básicas

## AJUSTE DE CAMPOS DE VELOCIDAD EN 2D VÍA GRADIENTE CONJUGADO

Tesis

Para obtener el título de:

MAESTRO EN CIENCIAS

Presenta:

Ricardo Arias Palacios

Director de tesis:

MC. Jorge López López

ASESOR EXTERNO:

Dr. Héctor Juárez Valencia

ASESOR INTERNO:

Dr. Gamaliel Blé González

Cunduacán, Tabasco. 21 de marzo de 2013.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>I</b>
<b>1. Preliminares matemáticos</b>	<b>1</b>
1.1. Teoría de Lax-Milgram . . . . .	1
1.2. Método del Gradiente Conjugado . . . . .	4
1.3. Espacios de Sobolev . . . . .	13
1.4. Multiplicadores de Lagrange . . . . .	17
1.5. Elemento finito . . . . .	22
<b>2. Generación de campos de velocidades</b>	<b>33</b>
2.1. Campos de velocidades de viento . . . . .	35
2.2. Campos de velocidades para agua . . . . .	36
2.3. Campos de velocidades generales . . . . .	36
<b>3. Aproximación del campo ajustado</b>	<b>43</b>
3.1. Enfoque de punto silla para $(u, \lambda)$ . . . . .	43
3.2. Gradiente conjugado para determinar $\lambda$ . . . . .	47
<b>4. Cálculos y ejemplos</b>	<b>53</b>
4.1. Ejemplos de Aplicación . . . . .	57
4.1.1. El campo $\mathbf{u} = (x, -z)$ . . . . .	57
4.1.2. Canal con paredes curvas . . . . .	59
4.2. Conclusiones . . . . .	61
<b>Bibliografía</b>	<b>63</b>



# Introducción

## Campos de velocidades

Para algunos problemas meteorológicos y un número grande de aplicaciones se requiere conocer o ajustar campos de velocidades en una región dada. Como ejemplo se tiene el problema de transporte y difusión de contaminantes en ríos, el efecto del viento en la propagación del fuego sobre estructuras, el flujo en aguas someras, modelos de calidad de aire, etcétera. Particularmente en el caso de viento, usualmente se conocen las medidas horizontales de los campos mientras que las verticales deben predecirse o calcularse. Para este caso de ajuste de campos de velocidad, se han propuesto varios métodos y estrategias con diferentes grados de complejidad para enfrentar el problema y que se pueden incluir en dos tipos de modelos generales: modelos de pronóstico y modelos de diagnóstico. Los modelos de pronóstico son modelos hidrodinámicos complejos dependientes del tiempo que analizan el flujo incluyendo efectos térmicos, variación de densidad e interacciones turbulentas. Aunque estos modelos son realistas, son caros de operar, requieren de gran equipo de cómputo y un entrenamiento especializado para su manipulación. Por otro lado, los modelos de diagnóstico no requieren de la integración de ecuaciones hidrodinámicas que en ocasiones llegan a ser no lineales; en lugar de ello dispone de datos interpolados para generar campos que satisfacen algunas restricciones físicas o dinámicas, por ejemplo, para garantizar conservación de masa se impone una versión simplificada de la ecuación de continuidad y condiciones de resbalamiento (que se piden en una parte de la frontera del dominio donde se hace el análisis del campo de velocidades). El modelo resultante se llama modelo de masa consistente. En este trabajo se emplea una variante del modelo de masa-consistente basado en la formulación hecha por Sasaki [SY]. Esta aproximación es usada en una variedad de problemas meteorológicos. El modelo masa-consistente resulta atractivo porque

es simple y fácil de operar. En algunas aplicaciones estos modelos superan los más sofisticados y costosos modelos dinámicos. Sin embargo los modelos de conservación de masa tienen algunas desventajas porque están basados en modelos incompletos o muy idealizados y tienen dificultad al representar los flujos adecuadamente donde los datos son dispersos (como montañas u océanos). A pesar de estas limitaciones los modelos de conservación de masa son una herramienta valiosa para las aplicaciones donde se requiera un campo de velocidad.

## El problema principal

El método variacional propuesto por Sasaki usa la ecuación de continuidad:  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , donde  $\mathbf{u}$  es el campo de velocidad en un dominio dado  $\Omega$  con  $\partial\Omega = \Gamma_V \cup \Gamma_N$  y la condición de resbalamiento  $\mathbf{u} \cdot \vec{n} = 0$  en  $\Gamma_N$ , donde  $\Gamma_N$  es la frontera natural de  $\Omega$ . El método se basa en la minimización de un funcional  $L$  definido mediante:

$$L(\mathbf{u}, \lambda) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{S(\mathbf{u} - \mathbf{u}^I) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}^I) + \lambda \nabla \cdot \mathbf{u}\} dV \quad (1)$$

donde  $\mathbf{u}^I$  es un campo inicial observado,  $\lambda$  es un multiplicador de Lagrange y  $S$  es una matriz diagonal con parámetros de peso  $\alpha_i$  positivos para  $i=1,2$  llamados módulos de precisión de Gauss, relacionado con las escalas de las respectivas componentes del campo de velocidades. Las ecuaciones de Euler-Lagrange de (1) son:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^I + S^{-1} \nabla \lambda \quad (2)$$

Por lo general  $\mathbf{u}$  se obtiene de (2) después de haber calculado  $\lambda$ ; ya que  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , de (2) se obtiene:  $-\nabla \cdot (S^{-1} \nabla \lambda) = \nabla \cdot \mathbf{u}^I$  de la cual se obtiene  $\lambda$ . Para complementar esta ecuación, se usa comúnmente dos tipos de condiciones de frontera: condiciones de frontera homogéneas de Dirichlet  $\lambda=0$  para fronteras abiertas o con flujo y condiciones de frontera tipo Neumann ( $\partial\lambda/\partial\mathbf{n} = 0$ ) para fronteras cerradas o sin flujo (márgenes de ríos o lagos). Cuando el problema se aborda desde este punto de vista se le llama enfoque

elíptico. La aplicación incorrecta de las condiciones de frontera puede degradar la solución en varios órdenes de magnitud. La estrategia planteada en este trabajo es introducir una nueva aproximación basada en la formulación de un problema de punto silla lo cual permite la implementación de técnicas de dinámica computacional de fluidos teniendo como ventaja que no se requieren condiciones de frontera para el multiplicador, produce resultados mejores y ayuda a establecer condiciones de fronteras más consistentes en fronteras truncadas no físicas.

La tesis se compone de cuatro capítulos, desarrollados de la siguiente manera: el capítulo 1 contiene el material preliminar necesario, como lo es el método de gradiente conjugado para resolver sistemas de ecuaciones lineales en  $\mathbb{R}^n$ , el teorema de Lax-Milgram que garantiza la existencia y unicidad de soluciones de funcionales lineales bajo ciertas condiciones, y resultados de cálculo como el método de multiplicadores de Lagrange para resolver problemas de optimización con restricciones, así como las ideas básicas de la teoría de elemento finito. En el capítulo 2 se plantea matemáticamente el problema principal de esta tesis, y se justifica la existencia y unicidad de la solución. En el capítulo 3 se adapta el método de gradiente conjugado, para aproximar numéricamente la solución de nuestro problema. El capítulo 4 incluye los detalles para implementar computacionalmente el método de gradiente conjugado para resolver el tipo de problemas que nos interesa, y termina con su aplicación a dos ejemplos.

# Capítulo 1

## Preliminares matemáticos

### 1.1. Teoría de Lax-Milgram

En esta sección describimos una teoría abstracta para obtener la existencia y la unicidad de la solución de una formulación variacional en un espacio de Hilbert. Denotamos por  $V$  a un espacio de Hilbert real, por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  al producto interior y por  $\|\cdot\|$  la norma. Consideremos una formulación variacional del tipo:

$$\text{Encontrar } u \in V \text{ tal que: } a(u, v) = L(u) \text{ para todo } v \in V, \quad (1.1)$$

donde:

$L : V \rightarrow \mathbb{R}$  es una forma lineal en  $V$  y existe  $C > 0$  tal que:

$$|L(v)| \leq C\|v\| \text{ para todo } v \in V$$

$a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  es una forma bilineal, y existe  $M > 0$  tal que:

$$|a(u, v)| \leq M\|u\|\|v\| \text{ para todo } u, v \in V$$

y además existe  $d > 0$  tal que:

$$|a(v, v)| \leq d\|v\|^2 \text{ para todo } v \in V$$

Las hipótesis que se piden anteriormente son suficientes para resolver (1.1) en particular es esencial la elipticidad de  $a$ , de acuerdo al siguiente teorema:



**Teorema 1.1.1** (Lax-Milgram). Sea  $V$  un espacio de Hilbert real,  $L(v)$  una forma lineal en  $V$ ,  $a(u, v)$  una forma bilineal continua y elíptica en  $V$ . Entonces la formulación variacional (1.1) tiene una única solución. Más aún, esta solución depende continuamente de la forma lineal  $L$ .

*Demostración.* Para todo  $w \in V$ , el mapeo  $v \rightarrow a(w, v)$  es una forma lineal continua en  $V$ , consecuentemente, el teorema de representación de Riesz implica que existe un elemento de  $V$ , denotado por  $A(w)$ , tal que:

$$a(w, v) = \langle A(w), v \rangle \text{ para todo: } v \in V.$$

Además, la bilinealidad de  $a(w, v)$  implica la linealidad del mapeo  $w \rightarrow A(w)$ . luego, tomando  $v = A(w)$ , la continuidad de  $a(w, v)$  implica que:

$$\|A(w)\|^2 = a(w, A(w)) \leq M\|w\|\|A(w)\|,$$

esto es,  $\|A(w)\| \leq M\|w\|$ , además el mapeo  $w \rightarrow A(w)$  es continuo. Aplicando nuevamente el teorema de representación de Riesz, implica que existe un elemento de  $V$  que denotamos por  $f$  tal que:  $\|f\| = \|L\|$  y,

$$L(v) = \langle f, v \rangle \text{ para todo } v \in V.$$

Finalmente el problema (1.1) es equivalente a:

$$\text{Encontrar } u \in V \text{ tal que: } A(u) = f \tag{1.2}$$

Para demostrar el teorema ahora debemos mostrar que el operador  $A$  es una biyección de  $V$  en  $V$  (que implica la existencia y unicidad de  $u$ ) y que su inversa es continua (que demuestra la dependencia continua de  $u$  con respecto a  $L$ ). La elipticidad de  $a(\cdot, \cdot)$  implica que:

$$d\|w\|^2 \leq a(w, w) = \langle A(w), w \rangle \leq \|A(w)\|\|w\|$$

de lo que se obtiene:

$$d\|w\| \leq \|A(w)\| \text{ para todo } w \in V \tag{1.3}$$

Lo que implica que  $A$  es inyectivo. Para mostrar que  $A$  es sobreyectivo, es decir,  $Im(A) = V$  (que no es obvio si  $V$  es infinito dimensional), es suficiente mostrar que  $Im(A)$  es cerrado en  $V$  y que  $Im(A)^\perp = \{0\}$ . De hecho, en este caso nosotros veremos que  $V = \{0\}^\perp = (Im(A)^\perp)^\perp = Im(\overline{A}) = Im(A)$ , lo

que demostrará que  $A$  es sobreyectivo. Sea  $A(w_n)$  una sucesión en  $Im(A)$  que converge a  $b \in V$ . En virtud de (1.3) tenemos:

$$d\|w_n - w_p\| \leq \|A(w_n) - A(w_p)\|$$

que tiende a cero cuando  $n$  y  $p$  tienden a infinito. Por consiguiente  $w_n$  es una sucesión de Cauchy en el espacio de Hilbert  $V$ , es decir, converge a un límite  $w \in V$ . Entonces, por la continuidad de  $A$  se tiene que  $A(w_n)$  converge a  $A(w) = b$ , con  $b \in Im(A)$  e  $Im(A)$  es cerrado. Por otro lado, sea  $v \in Im(A)$ ; la elipticidad de  $a(w, v)$  implica que:

$$d\|v\|^2 \leq a(v, v) = \langle A(v), v \rangle = 0,$$

es decir,  $v = 0$  e  $Im(A) = 0^\perp$  que demuestra que  $A$  es biyectivo. sea  $A^{-1}$  su inversa: la desigualdad (1.3) con  $w = A^{-1}(v)$  demuestra que  $A^{-1}$  es continuo, por consiguiente, la solución  $u$  depende continuamente de  $f$ . ◀

**Observación 1.1.2.** Si el espacio de Hilbert  $V$  es finito dimensional (que no es el caso para las aplicaciones que nosotros veremos), la prueba del teorema (1.1.1) de Lax-Milgram se simplifica considerablemente. De hecho, en espacios de dimensión finita todos los mapeos lineales son continuos, y la inyectividad (1.3) de  $A$  es equivalente a ser invertible. En este caso, como en el caso general la hipótesis de elipticidad de  $a(w, v)$  es indispensable para demostrar la inyectividad de  $A$ .

**Afirmación 1.1.3.** Tomando las hipótesis del Lax-Milgram y asumiendo que la forma bilineal es simétrica  $a(w, v) = a(v, w)$  para todo  $v, w \in V$ , sea  $J(v)$  el funcional en  $V$  definido como:

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v). \quad (1.4)$$

Sea  $u \in V$  la solución de (1.1). Entonces  $u$  es el único punto donde el funcional  $J$  tiene un mínimo, es decir, es el único punto donde

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v) \quad (1.5)$$

Recíprocamente, si  $J$  tiene un mínimo en  $u \in V$ , entonces  $u$  es único y es la solución única de la formulación variacional (1.1).

*Demostración.* Si  $u$  es la solución de (1.1), por la simetría de  $a(u, v)$

$$\begin{aligned} J(u+v) &= J(u) + \frac{1}{2}a(v, v) + a(u, v) - L(v) \\ &= J(u) + \frac{1}{2}a(v, v) \geq J(u) \end{aligned}$$

Como  $u+v$  es arbitrario en  $V$ , entonces  $u$  minimiza el funcional  $J$  en  $V$ .

Recíprocamente, si  $u$  minimiza  $J$  en  $V$ , para toda  $v \in V$  definimos la función  $j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como,  $j(t) = J(u+tv)$ , claramente  $j$  alcanza un mínimo en  $t=0$ , de donde se deduce que  $j'(0) = 0$ , esto es equivalente a (1.1). ◀

## 1.2. Método del Gradiente Conjugado

El método del gradiente conjugado se desarrolló originalmente como un método directo para resolver un sistema lineal definido positivo. Como método directo generalmente es inferior a la eliminación Gaussiana con pivoteo, pues ambos métodos requieren  $n$  pasos para determinar una solución, pero los pasos del método del gradiente conjugado tienen un costo mayor en cálculos que los de la eliminación Gaussiana. Sin embargo, el método del gradiente conjugado es muy útil como método iterativo de aproximación para resolver sistemas esparcidos de gran tamaño con entradas no nulas que aparecen con patrones predecibles. Estos problemas surgen con frecuencia al resolver problemas con valores en la frontera.

Cuando la matriz ha sido preconditionada para que los cálculos sean más eficaces, se obtienen buenos resultados en tan solo  $\sqrt{n}$  pasos. Empleado de esta manera, el método de gradiente conjugado es preferible sobre la eliminación Gaussiana y algunos otros métodos iterativos, ya que la eliminación Gaussiana requiere de  $n$  pasos. A lo largo de esta sección nosotros asumimos que  $A$  es una matriz simétrica y definida positiva, y denotaremos el producto interior en un espacio vectorial  $V$  de la siguiente manera:

$$\langle x, y \rangle = x^T y, \quad \forall x, y \in V$$

El siguiente resultado es una herramienta básica en el desarrollo del método del gradiente conjugado.

**Teorema 1.2.1.** Sea  $V$  un espacio vectorial con producto interior. El vector  $x^* \in V$  es una solución del sistema lineal definido  $Ax = b$  sí y sólo si  $x^*$  minimiza

$$g(x) = \langle x, Ax \rangle - 2\langle x, b \rangle$$

*Demostración.* Sean  $x, v \in V$  vectores fijos distintos de cero y  $t$  una variable real, tenemos que:

$$\begin{aligned} g(x + tv) &= \langle x + tv, Ax + tAv \rangle - 2\langle x + tv, b \rangle \\ &= \langle x, Ax \rangle + t\langle v, Ax \rangle + t\langle x, Av \rangle + t^2\langle v, Av \rangle - 2\langle x, b \rangle - 2t\langle v, b \rangle \\ &= \langle x, Ax \rangle + tv^T Ax + tx^T Av + t^2\langle v, Av \rangle - 2\langle x, b \rangle - 2t\langle v, b \rangle \\ &= \langle x, Ax \rangle + 2tv^T Ax + t^2\langle v, Av \rangle - 2\langle x, b \rangle - 2t\langle v, b \rangle \\ &= \langle x, Ax \rangle - 2\langle x, b \rangle + 2t\langle v, Ax - b \rangle + t^2\langle v, Av \rangle, \end{aligned}$$

de modo que:

$$g(x + tv) = g(x) + 2t\langle v, Ax - b \rangle + t^2\langle v, Av \rangle. \quad (1.6)$$

Como  $x$  y  $v$  son fijos, definimos la función cuadrática  $h$  en  $t$  como:

$$h(t) = g(x + tv).$$

Entonces  $h$  toma un valor mínimo cuando  $h'(t) = 0$  pues el coeficiente del término cuadrático  $\langle v, Av \rangle$  es positivo. Como

$$h'(t) = 2\langle v, Ax - b \rangle + 2t\langle v, Av \rangle,$$

el mínimo se alcanza cuando

$$t_m = -\frac{\langle v, Ax - b \rangle}{\langle v, Av \rangle} = \frac{\langle v, b - Ax \rangle}{\langle v, Av \rangle},$$

y de la ecuación (1.6)

$$\begin{aligned} h(t_m) &= g(x) - 2\frac{\langle v, b - Ax \rangle}{\langle v, Av \rangle}\langle v, b - Ax \rangle + \frac{\langle v, b - Ax \rangle^2}{\langle v, Av \rangle}\langle v, Av \rangle \\ &= g(x) - \frac{\langle v, b - Ax \rangle^2}{\langle v, Av \rangle}. \end{aligned}$$

Así, para cualquier vector  $v \neq 0$  en  $V$  tenemos que  $g(x + t_mv) < g(x)$  a menos que  $\langle v, b - Ax \rangle = 0$ , en cuyo caso  $g(x + t_mv) = g(x)$ . Este es el

resultado básico necesario para demostrar el teorema (1.2.1).

Supongamos que  $x^*$  satisface  $Ax = b$  entonces  $\langle v, b - Ax^* \rangle = 0$  para cualquier vector  $v \in V$ , y  $g(x)$  no puede ser menor que  $g(x^*)$ . Así  $x^*$  minimiza  $g$ .

Por otro lado supongamos que  $x^*$  minimiza a  $g$ . Entonces para cualquier vector  $v \in V$  se tiene que:  $g(x^* + tv) \geq g(x^*)$ . Así,  $\langle v, b - Ax^* \rangle = 0$ , esto implica que  $b - Ax^* = 0$  y en consecuencia,  $Ax^* = b$ . ◀

El método de gradiente conjugado que describimos en esta sección resuelve el sistema de ecuaciones lineales con  $n$  ecuaciones y  $n$  incógnitas,  $Ax^* = b$

Para iniciar el método elegimos  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  una solución aproximada de  $Ax = b$ , y  $d \neq 0$  una dirección de búsqueda en la cual alejarse de  $x$  para mejorar la aproximación. Sea  $r = b - Ax$  el vector residual asociado a  $x$ , y

$$t = \frac{\langle d, b - Ax \rangle}{\langle d, Ad \rangle} = \frac{\langle d, r \rangle}{\langle d, Ad \rangle}.$$

Si  $r \neq 0$  y  $d$  y  $r$  no son ortogonales entonces  $x + td$  da un menor valor de  $g$  que  $x$  y posiblemente esté mas cerca de  $x^*$  que  $x$ . Esto sugiere el siguiente método.

Sea  $x^{(0)}$  una primera aproximación de  $x^*$  y sea  $d^{(1)} \neq 0$  una dirección de búsqueda inicial. Para  $k = 1, 2, 3, \dots$  calculamos:

$$\alpha_k = \frac{\langle d^{(k)}, b - Ax^{(k-1)} \rangle}{\langle d^{(k)}, Ad^{(k)} \rangle}$$

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + \alpha_k d^{(k)}$$

y elegimos una nueva dirección de búsqueda  $d^{(k+1)}$ . El objetivo es hacer la elección de modo que la sucesión  $\{x^{(k)}\}$  converja rápidamente a  $x^*$ .

Para elegir la dirección de búsqueda, observemos que

$$\nabla g(x) = A^t x + Ax - 2b. \quad (1.7)$$

Como  $A$  es simétrica, la ecuación (1.7) se simplifica por

$$\nabla g(x) = 2(Ax - b) = 2r,$$

donde  $r$  es el vector residual asociado a  $x$ .

Del cálculo de varias variables tenemos que la dirección de máximo descenso de  $g(x)$  es la dirección dada por  $-\nabla g(x)$ , es decir en la dirección del residual.

El método que elige

$$d^{(k+1)} = r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$$

se llama el método del máximo descenso.

El método de gradiente conjugado usa un conjunto de vectores de dirección no nulos  $\{d^{(1)}, d^{(2)}, \dots, d^{(n)}\}$  que satisfacen,

$$\langle d^{(i)}, Ad^{(j)} \rangle = 0 \text{ para } i \neq j.$$

Esto se llama condición de A-ortogonalidad y el conjunto de vectores  $\{d^{(1)}, d^{(2)}, \dots, d^{(n)}\}$  es A-ortogonal.

**Teorema 1.2.2.** Los vectores residuales  $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$  donde  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  en el método del gradiente conjugado son ortogonales a las direcciones de descenso de las iteraciones anteriores, es decir, satisfacen la ecuación

$$\langle r^{(k)}, d^{(j)} \rangle = 0 \text{ para } j = 1, 2, \dots, k.$$

*Demostración.* Para hacer la demostración se estudiarán por separado los casos  $j = k$  y  $j < k$ .

Caso  $j = k$   
observemos que

$$\begin{aligned} r^{(k)} &= b - Ax^{(k)} \\ &= b - A(x^{(k-1)} + \alpha_k d^{(k)}) \\ &= b - Ax^{(k-1)} + \alpha_k Ad^{(k)} \\ &= r^{(k-1)} + \alpha_k Ad^{(k)}. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}
 \langle d^{(k)}, r^{(k)} \rangle &= \langle d^{(k)}, r^{(k-1)} + \alpha_k Ad^{(k)} \rangle \\
 &= \langle d^{(k)}, r^{(k-1)} \rangle + \langle d^{(k)}, \alpha_k Ad^{(k)} \rangle \\
 &= \langle d^{(k)}, r^{(k-1)} \rangle + \langle d^{(k)}, \frac{\langle d^{(k)}, r^{(k-1)} \rangle}{\langle d^{(k)}, Ad^{(k)} \rangle} Ad^{(k)} \rangle \\
 &= \langle d^{(k)}, r^{(k-1)} \rangle + \frac{\langle d^{(k)}, r^{(k-1)} \rangle}{\langle d^{(k)}, Ad^{(k)} \rangle} \langle d^{(k)}, Ad^{(k)} \rangle \\
 &= \langle d^{(k)}, r^{(k-1)} \rangle - \langle d^{(k)}, r^{(k-1)} \rangle = 0.
 \end{aligned}$$

Caso  $j < k$

$$\begin{aligned}
 \langle d^{(j)}, r^{(k)} \rangle &= \langle d^{(j)}, r^{(k-1)} + \alpha_k Ad^{(k-1)} \rangle \\
 &= \langle d^{(j)}, r^{(k-1)} \rangle + \alpha_k \langle d^{(j)}, Ad^{(k-1)} \rangle \\
 &= \langle d^{(j)}, r^{(k-1)} \rangle = \dots = \langle d^{(j)}, r^{(j)} \rangle = 0
 \end{aligned}$$

◀

El método del gradiente conjugado elige las direcciones de búsqueda  $\{d^{(k)}\}$  durante el proceso iterativo de modo que los vectores residuales  $\{r^{(k)}\}$  sean mutuamente ortogonales. Para construir los vectores de dirección  $\{d^{(1)}, d^{(2)}, d^{(3)}, \dots\}$  y las aproximaciones  $\{x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \dots\}$ , partimos de una condición inicial  $x^{(0)}$ , y usamos la dirección de máximo descenso  $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$  como la primera dirección de búsqueda  $d^{(1)}$ .

Supongamos que hemos calculado las direcciones conjugadas  $d^{(1)}, d^{(2)}, d^{(3)}, \dots, d^{(k-1)}$  y las aproximaciones  $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \dots, x^{(k-1)}$  con

$$x^{(k-1)} = x^{(k-2)} + t_{k-1}d^{(k-1)},$$

donde

$$\langle d^{(i)}, Ad^{(j)} \rangle = 0 \text{ y } \langle r^{(i)}, r^{(j)} \rangle = 0, \text{ para } i \neq j.$$

Si  $x^{(k-1)}$  es la solución de  $Ax = b$  hemos terminado. En caso contrario  $r^{(k-1)} = b - Ax^{(k-1)} \neq 0$  y el teorema (1.13) implica que  $\langle r^{(k-1)}, d^{(i)} \rangle = 0$ , para  $i = 1, 2, \dots, k-1$ .

Entonces usamos  $r^{(k-1)}$  para generar  $d^{(k)}$  haciendo

$$d^{(k)} = r^{(k-1)} + \beta_{k-1}d^{(k-1)}.$$

Queremos elegir  $\beta_{k-1}$  de modo que

$$\langle d^{(k-1)}, Ad^{(k)} \rangle = 0,$$

como

$$Ad^{(k)} = Ar^{(k-1)} + \beta_{k-1}Ad^{(k-1)}$$

y

$$\langle d^{(k-1)}, Ad^{(k)} \rangle = \langle d^{(k-1)}, Ar^{(k-1)} \rangle + \beta_{k-1}\langle d^{(k-1)}, Ad^{(k-1)} \rangle$$

tenemos que  $\langle d^{(k-1)}, Ad^{(k)} \rangle = 0$  cuando

$$\beta_{k-1} = \frac{\langle d^{(k-1)}, Ar^{(k-1)} \rangle}{\langle d^{(k-1)}, Ad^{(k-1)} \rangle},$$

además con esta elección de  $\beta_{k-1}$  se tiene que  $\langle d^{(k)}, Ad^{(i)} \rangle = 0$ , para cada  $i = 1, 2, \dots, k-2$ . Así, el conjunto  $\{d^{(1)}, d^{(2)}, d^{(3)}, \dots, d^{(k)}\}$  es un conjunto A-ortogonal. Una vez elegido  $d^{(k)}$  calculamos,

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{\langle d^{(k)}, r^{(k-1)} \rangle}{\langle d^{(k)}, Ad^{(k)} \rangle} \\ &= \frac{\langle r^{(k-1)} + \beta_{k-1}d^{(k-1)}, r^{(k-1)} \rangle}{\langle d^{(k)}, Ad^{(k)} \rangle} \\ &= \frac{\langle r^{(k-1)}, r^{(k-1)} \rangle}{\langle d^{(k)}, Ad^{(k)} \rangle} + \beta_{k-1} \frac{\langle d^{(k-1)}, r^{(k-1)} \rangle}{\langle d^{(k)}, Ad^{(k)} \rangle}, \end{aligned}$$

por el teorema (1.13)  $\langle d^{(k-1)}, r^{(k-1)} \rangle = 0$  de modo que

$$\alpha_k = \frac{\langle r^{(k-1)}, r^{(k-1)} \rangle}{\langle d^{(k)}, Ad^{(k)} \rangle}. \quad (1.8)$$

Así,

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + \alpha_k d^{(k)}.$$



Para calcular  $r^{(k)}$  multiplicamos por  $A$  y restamos  $b$  para obtener

$$Ax^{(k)} - b = Ax^{(k-1)} - b + \alpha_k Ad^{(k)}$$

o bien

$$r^{(k)} = r^{(k-1)} - \alpha_k Ad^{(k)}.$$

Así,

$$\begin{aligned} \langle r^{(k)}, r^{(k)} \rangle &= \langle r^{(k-1)}, r^{(k)} \rangle - \alpha_k \langle Ad^{(k)}, r^{(k)} \rangle \\ &= -\alpha_k \langle r^{(k)}, Ad^{(k)} \rangle, \end{aligned}$$

además de la ecuación (1.8)

$$\langle r^{(k-1)}, r^{(k-1)} \rangle = \alpha_k \langle d^{(k)}, Ad^{(k)} \rangle,$$

de modo que,

$$\begin{aligned} \beta_k &= -\frac{\langle d^{(k)}, Ar^{(k)} \rangle}{\langle d^{(k)}, Ad^{(k)} \rangle} \\ &= -\frac{\langle r^{(k)}, Ad^{(k)} \rangle}{\langle d^{(k)}, Ad^{(k)} \rangle} \\ &= \frac{\langle r^{(k)}, r^{(k)} \rangle}{\langle r^{(k-1)}, r^{(k-1)} \rangle}. \end{aligned}$$

En resumen tenemos las siguientes fórmulas:

$r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$ , definimos la primera dirección de descenso como:  $d^{(1)} = r^{(0)}$ ;

y para  $k = 1, 2, 3, \dots$

$$\alpha_k = \frac{\langle r^{(k-1)}, r^{(k-1)} \rangle}{\langle d^{(k)}, Ad^{(k)} \rangle},$$

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \alpha_k d^{(k)},$$

$$r^{(k)} = r^{(k-1)} - \alpha_k Ad^{(k)},$$

$$\beta_k = \frac{\langle r^{(k)}, r^{(k)} \rangle}{\langle r^{(k-1)}, r^{(k-1)} \rangle},$$

$$d^{(k+1)} = r^{(k)} + \beta_k d^{(k)}.$$

Si renombramos las variables anteriores de manera que la enumeración de las direcciones de descenso  $d^{(i)}$  y los coeficientes  $\alpha_k$  inicien a partir de cero, obtenemos:

$$r^{(0)} = b - Ax^{(0)}.$$

Después definimos y denotamos la primera dirección de descenso como:

$$d^{(0)} = r^{(0)};$$

y para  $k = 0, 1, \dots$ , obtenemos,

$$\alpha_k = \frac{\langle r^{(k)}, r^{(k)} \rangle}{\langle d^{(k)}, Ad^{(k)} \rangle},$$

$$x^{(k)} = x^{(k)} - \alpha_k d^{(k)},$$

$$r^{(k+1)} = r^{(k)} - \alpha_k Ad^{(k)},$$

$$\beta_{k+1} = \frac{\langle r^{(k+1)}, r^{(k+1)} \rangle}{\langle r^{(k)}, r^{(k)} \rangle},$$

$$d^{(k+1)} = r^{(k+1)} + \beta_{k+1} d^{(k)}.$$

Con éstas fórmulas construimos un algoritmo que nos permite resolver el sistema  $Ax = b$  de la siguiente manera:

1. Tomamos cualquier  $x_0$  como una aproximación inicial de la solución  $x^*$ .
2. Fijamos  $\epsilon > 0$  que representa el margen de error con el que queremos aproximar la solución  $x^*$ .
3. Hacemos  $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$ , y tomamos el vector  $d^{(0)} = r^{(0)}$  como la primera dirección de descenso. Si  $|r^{(0)}| < \epsilon$  podemos considerar  $x_0$  como una buena aproximación de la solución  $x^*$ . Si no pasa ésto, entonces para  $k = 0, 1, \dots$ , continuamos con el siguiente paso.
4. Dados  $r^{(k)}$  y  $d^{(k)}$  calculamos  $\alpha_k = \frac{\langle r^{(k)}, r^{(k)} \rangle}{\langle d^{(k)}, Ad^{(k)} \rangle}$ ,

5.  $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k d^{(k)}$ ,
6.  $r^{(k+1)} = r^{(k)} - \alpha_k A d^{(k)}$ .

Tomamos la norma del error que tiene la aproximación  $x^{(k+1)}$  con respecto a  $x^*$ , si  $|r^{(k+1)}| < \epsilon$  terminamos el proceso tomando  $x = x^{(k+1)}$ .

Si no cumple esta condición de convergencia continuamos con el siguiente paso.

7.  $\beta_{k+1} = \frac{\langle r^{(k+1)}, r^{(k+1)} \rangle}{\langle r^{(k)}, r^{(k)} \rangle}$ , con este coeficiente  $\beta_{k+1}$  construimos la siguiente dirección de descenso que usaremos para calcular la aproximación  $x^{(k+2)}$ .
8.  $d^{(k+1)} = r^{(k)} + \beta_k d^{(k)}$ .

Observemos que este paso se considera en la iteración  $k + 1$  aún cuando se utiliza para la construcción de la aproximación  $x^{(k+2)}$ , esto lo justifica el hecho de que la primera aproximación  $x^{(0)}$  fue tomada de manera arbitraria y para su selección no se requirió de alguna dirección específica.

9. Aproximación de la solución  $x = x^{(k)}$ . Termina el algoritmo.

Se puede ver en [JL] el siguiente teorema relativo a la convergencia del método de gradiente conjugado

**Teorema:** Si la matriz  $A$  tiene solo  $p$  diferentes valores propios, y si  $x^*$  es la solución exacta del sistema  $Ax = b$  entonces el método de gradiente conjugado converge en a lo más  $p$  iteraciones y la estimación del error viene dada por:

$$\|x - x^{(k)}\|_A \leq 2 \left[ \frac{r-1}{r+1} \right] \|x - x^{(k-1)}\|_A, \quad (1.9)$$

donde  $r = \frac{\lambda_{max}(A)}{\lambda_{min}(A)}$  es el condicionamiento de la matriz  $A$ .

## 1.3. Espacios de Sobolev

En esta sección definimos los espacios de Sobolev que son los espacios naturales de funciones donde se encuentran las soluciones de las formulaciones variacionales de ecuaciones diferenciales. Estos espacios se construyen partiendo del espacio de funciones definidas en un conjunto  $\Omega$ , e integrables en el sentido de Lebesgue, denotado por  $L(\Omega)$ .

**Definición 1.3.1.** Una función medible  $f(x)$ , definida sobre un conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  se dice que pertenece al espacio  $L^2(\Omega)$  si

$$\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < \infty,$$

es decir si  $|f(x)|^2$  es integrable.

El espacio  $L^2(\Omega)$  está dotado del producto interior dado por

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$$

y de la norma asociada a éste

$$\|f\|_0 = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

o equivalentemente,

$$\|f\|_0 = \left[ \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

**Ejemplo 1.3.2.** Un ejemplo sencillo de una función en  $L^2(\Omega)$  es la función  $\delta_{\mathbb{Q}}$  definida como:

$$\delta_{\mathbb{Q}} = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$$

Esta función está en el espacio  $L^2(\mathbb{R})$ , (es una función simple sobre un conjunto medible, por lo tanto Lebesgue integrable aún cuando no es Riemann integrable.)

Consideramos el subespacio

$$L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q dx = 0\};$$

esto es,  $L_0^2(\Omega)$  es el espacio de las funciones cuya integral es cero sobre  $\Omega$ .

A partir de los espacios de funciones anteriormente descritos, se construyen los espacios de Sobolev. Existen muchos espacios de Sobolev, pero en esta sección solamente describimos aquellos que serán utilizados para el desarrollo del problema estudiado en este trabajo.

**Definición 1.3.3.** Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  y  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función de  $L^2(\Omega)$ , decimos que  $v$  es diferenciable en el sentido débil en  $L^2(\Omega)$ , si existen funciones  $w_i \in L^2(\Omega)$ , para  $i = 1, \dots, n$ , tal que, para cada función  $f \in C_c^\infty(\Omega)$  se tiene

$$\int_{\Omega} v(x) \frac{\partial f}{\partial x^i} dx = - \int_{\Omega} w_i(x) f(x).$$

Donde  $C_c^\infty(\Omega)$  es el conjunto de funciones con soporte compacto en  $\Omega$ ; cada  $w_i$  se llama la derivada parcial débil de  $v$  y se escribe  $\frac{\partial v}{\partial x^i}$ .

**Nota 1.3.4.** Si  $v$  es diferenciable en el sentido usual y sus derivadas parciales pertenecen a  $L^2(\Omega)$ , entonces las derivadas parciales usuales y las derivadas débiles de  $v$  coinciden. Las funciones definidas en  $I \subset \mathbb{R}$  diferenciables en el sentido débil son “grosso modo” primitivas de funciones de  $L^2(I)$ .

**Definición 1.3.5.** Sea  $\Omega$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ , se define el conjunto  $H^1(\Omega)$  como,

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \mid \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \text{ para toda } i = 0, 1, \dots, n\},$$

donde  $\frac{\partial v}{\partial x^i}$  denota la derivada parcial en el sentido débil.

El espacio  $H^1(\Omega)$  está equipado con el producto escalar

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} (u(x)v(x) + \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)) dx$$

y con la norma,

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

**Proposición 1.3.6.** El espacio  $H^1(\Omega)$  con la norma definida anteriormente es un espacio de Hilbert.

La demostración de esta afirmación la podemos consultar en [AI].

**Ejemplo 1.3.7.** Sea  $\Omega = [-1, 1]$  y

$$v(x) = \frac{1}{2}(|x| + x), \quad x \in \Omega.$$

$v$  definida de esta manera es un elemento de  $H^1(\Omega)$ , con

$$v'(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -1 < x < 0. \\ 1, & \text{si } 0 < x < 1. \end{cases}$$

note que

$$v(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -1 < x \leq 0. \\ x, & \text{si } 0 < x < 1. \end{cases}$$

A continuación describiremos espacios de funciones vectoriales, debido a la importancia que tienen en el estudio de problemas como el que nos ocupa en esta tesis:

**Definición 1.3.8.**

$$\mathbf{L}_2(\Omega) = L^2(\Omega)^d \text{ con } d = 2, 3;$$

**Definición 1.3.9.** Sea  $\Omega$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ , se define el conjunto  $\mathbf{H}(\text{div}; \Omega)$  como

$$\mathbf{H}(\text{div}; \Omega) = \{v \in \mathbf{L}_2(\Omega) \mid \nabla \cdot v \in L_2(\Omega)\}.$$

Este espacio es muy útil en muchas aplicaciones, en nuestro trabajo es uno de los espacios más importantes ya que en un subespacio de  $\mathbf{H}(\text{div}; \Omega)$  buscaremos las soluciones para el problema tratado.

El espacio  $\mathbf{H}(\text{div}; \Omega)$  está equipado con la norma  $\|\cdot\|_{s,\Omega}$  asociada al producto interior

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} (Su) \cdot v dx. \quad (1.10)$$

donde

$$v \cdot w = \sum_{i=1}^d v_i w_i$$

es el producto escalar usual en  $\mathbb{R}^d$ , y  $S = S(x) \in \mathbb{R}^{d \times d}$  es una matriz simétrica definida positiva (usualmente diagonal).

**Ejemplo 1.3.10.** Sea  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  y

$$F(x, y) = (x^2, y), \quad (x, y) \in \Omega.$$

El campo vectorial  $F$  es un elemento de  $\mathbf{H}(\text{div}; \Omega)$  ya que  $x^2, y \in L_2(\Omega)$  y

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial x^2}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} = 2x + 1 \in L_2(\Omega).$$

**Ejemplo 1.3.11.** El campo vectorial

$$F(x, y) = (xy, xy) \quad (x, y) \in \Omega,$$

es también un elemento de  $\mathbf{H}(\text{div}; \Omega)$  ya que  $xy, xy \in L_2(\Omega)$

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial xy}{\partial x} + \frac{\partial xy}{\partial y} = y + x \in L_2(\Omega).$$

Un espacio que definimos de acuerdo a los requerimientos que exige nuestro problema, es el espacio que denotamos por  $\mathbf{V}$ , y que consta de todos los campos vectoriales que son candidatos para ser una aproximación del campo inicial  $u^I \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ , y se define de la siguiente manera:

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega) \mid \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ y } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ en } \Gamma_N\},$$

donde  $\Gamma_N$  representa la frontera natural del dominio sobre el que se esté trabajando, (esto se detalla en el siguiente capítulo).

**Definición 1.3.12.** Una función real valuada  $f$  definida sobre un conjunto  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  es llamada Lipschitz continua si existe una constante  $L > 0$  tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in \Gamma.$$

**Observación 1.3.13.** Notemos que una función Lipschitz continua es uniformemente continua.

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) un dominio con frontera  $\partial\Omega$ , sea  $x_0 \in \partial\Omega$  y construyamos la bola abierta con centro en  $x_0$  y radio  $\epsilon$ , es decir,  $B(x_0, \epsilon)$ , entonces definiremos el sistema coordenado  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$  tal que el segmento  $\partial\Omega \cap B(x_0, \epsilon)$  pueda expresarse como una función

$$\varepsilon_n = f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}). \quad (1.11)$$

Entonces definimos,

**Definición 1.3.14.** La frontera  $\partial\Omega$  del dominio  $\Omega$  es llamada de Lipschitz si  $f$  definida como en la ecuación (1.11) es una función Lipschitz continua. En otras palabras un dominio  $\Omega$  tiene frontera Lipschitz si ésta puede verse como la gráfica de una función de Lipschitz.

## 1.4. Multiplicadores de Lagrange

Resolver problemas de optimización sujeto a restricciones, no siempre es posible siguiendo la metodología de poner una variable en término de las otras. Otro procedimiento que se emplea para tal fin se denomina multiplicadores de Lagrange, en honor a su descubridor, el matemático francés Joseph L. Lagrange. El método está basado en el teorema siguiente:

**Teorema 1.4.1.** Suponga que  $f$  y  $g$  son funciones de dos variables cuyas primeras derivadas parciales son continuas. Si  $f$  tiene un extremo relativo en el punto  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  sujeto a la restricción  $g(x, y) = 0$  y  $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$ , entonces existe una constante  $\lambda$  tal que

$$\nabla f(x_0, y_0) + \lambda \nabla g(x_0, y_0) = 0 \quad (1.12)$$

*Demostración.* Si  $\nabla f(x_0, y_0) = 0$  se cumple (1.12) para  $\lambda = 0$ . Ahora se probará (1.12) para  $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$ . De las condiciones dadas, el teorema de la función implícita permite representar la curva  $C$  cuya ecuación es  $g(x, y) = 0$  mediante la ecuación vectorial

$$R(t) = \alpha(t)\hat{i} + \beta(t)\hat{j},$$

para  $t$  en algún intervalo donde  $R'(t) \neq 0$ . Sea  $t_0$  el valor de  $t$  correspondiente al punto  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  donde  $f$  tiene un extremo relativo. Conforme  $t$  varía a lo largo de  $C$  se obtiene diferentes valores de la función  $f$ , de los



cuales los puntos  $(x, y, f(x, y))$  están sobre la superficie definida por  $f$  y están sujeto a la restricción  $g(x, y) = 0$ . Sea  $\phi$  la función de la variable  $t$  definida por

$$\phi(t) = f(\alpha(t), \beta(t)),$$

como  $f$  tiene un extremo relativo en  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ , entonces  $\phi$  tiene un extremo relativo en  $t_0$ . Por lo tanto  $\phi'(t_0) = 0$ . Ahora calculamos  $\phi'(t)$  mediante la regla de la cadena.

$$\phi'(t) = f_x(x, y)\alpha'(t) + f_y(x, y)\beta'(t)$$

$$\phi'(t_0) = f_x(x_0, y_0)\alpha'(t_0) + f_y(x_0, y_0)\beta'(t_0)$$

debido a que  $\phi'(t_0) = 0$ , de la ecuación anterior se tiene,

$$f_x(x_0, y_0)\alpha'(t_0) + f_y(x_0, y_0)\beta'(t_0) = 0$$

o equivalentemente

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot R'(t_0) = 0. \quad (1.13)$$

Puesto que  $\nabla f(x_0, y_0)$  y  $R'(t)$  son distintos de cero, de (1.13) se puede concluir que  $\nabla f(x_0, y_0)$  es ortogonal a  $R'(t_0)$ . Sin embargo  $\nabla g(x_0, y_0)$  es ortogonal a  $R'(t_0)$ , como  $\nabla f(x_0, y_0)$  y  $\nabla g(x_0, y_0)$  son ortogonales al mismo vector, entonces son paralelos entre ellos de modo que se cumple la ecuación (1.12). ◀

La geometría del teorema (1.4.1) puede observarse en la figura (1.1). Observemos que  $\nabla f(x_0, y_0)$  y  $\nabla g(x_0, y_0)$  son ortogonales a  $R'(t_0)$ , como se exhibe en la demostración.

Ahora se mostrará cómo se aplica el teorema (1.4.1) para determinar los extremos relativos de un función  $f$  de dos variables sujeta a la restricción  $g(x, y) = 0$ . Se introduce una nueva variable, denominada multiplicador de Lagrange, y se forma la función auxiliar  $F$  de las variables  $x, y$  y  $\lambda$  dada por,

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y).$$

De este modo, si calculamos los puntos críticos de  $F$ , esto es los puntos donde se satisface las siguientes tres ecuaciones

$$F_x(x, y) = 0. \quad (1.14)$$

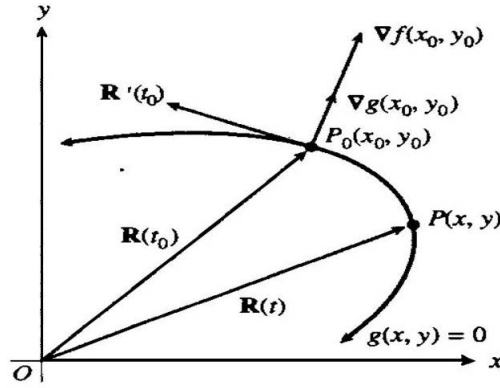


Figura 1.1: Geometría del teorema (1.4.1).

$$F_y(x, y) = 0. \quad (1.15)$$

$$F_\lambda(x, y) = 0. \quad (1.16)$$

Observemos que las ecuaciones (1.14) y (1.15) equivalen a

$$f_x(x, y) + \lambda g_x(x, y) = 0 \text{ y } g_y(x, y) + \lambda f_y(x, y) = 0,$$

y que estas dos ecuaciones son equivalentes a la ecuación vectorial

$$\nabla f(x_0, y_0) + \lambda \nabla g(x_0, y_0) = 0,$$

que es la ecuación (1.12) del teorema (1.4.1). Además la ecuación (1.16) es la ecuación  $g(x, y) = 0$  la cual es la restricción. Por lo tanto si  $f(x, y)$  tiene valores extremos sujeto a la restricción  $g(x, y) = 0$ , los alcanza en los puntos críticos de  $F$ .

Con esta justificación se plantea el siguiente procedimiento, para determinar los extremos relativos de  $f(x, y)$  sujeto a la restricción  $g(x, y) = 0$

1. Defina la función auxiliar  $F$  de las variables  $x, y, \lambda$ , también conocida como Lagrangiano asociado a  $f$  por,

$$F(x, y, \lambda) = \nabla f(x_0, y_0) + \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

2. Considere el sistema de ecuaciones que se forma al igualar a cero las tres primeras derivadas parciales,

$$\begin{cases} F_x(x, y) = 0. \\ F_y(x, y) = 0. \\ F_\lambda(x, y) = 0. \end{cases}$$

3. Resuelva el sistema del paso 2, para determinar los puntos críticos de  $F$ .
4. Entre las dos primeras coordenadas de los puntos críticos de  $F$ , obtenidos en el paso 3 se encuentran los valores de  $x$  y  $y$  que proporcionan los extremos relativos deseados.

**Observación 1.4.2.** Los extremos relativos de  $f$  sujeta a la restricción  $g(x, y) = 0$  pueden ocurrir en un punto donde  $g_x(x, y) = 0$  y  $g_y(x, y) = 0$ . Estos puntos tal vez no puedan obtenerse mediante el método de multiplicadores de Lagrange, por lo que deben examinarse por separado.

El método de multiplicadores de Lagrange puede extenderse a funciones de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}$ , el teorema siguiente es la versión generalizada a  $\mathbb{R}^n$  del teorema (1.4.1).

**Teorema 1.4.3.** Suponga que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones cuyas primeras derivadas parciales son continuas. Si  $f$  tiene un extremo relativo en el punto  $(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n))$  sujeto a la restricción  $g = 0$ , y  $\nabla g(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$  entonces existe una constante  $\lambda$  tal que,

$$\nabla f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda \nabla g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \quad (1.17)$$

La demostración de este teorema es semejante a la del teorema (1.4.1), la idea es demostrar que cuando  $\nabla f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  y  $\nabla g(x_1, x_2, \dots, x_n)$  son distintos del vector cero, los dos vectores son ortogonales a la superficie  $g = 0$ , lo cual implica que son paralelos. De este hecho resulta la ecuación (1.17).

**Ejemplo 1.4.4.** En este ejemplo usamos el método de multiplicadores de Lagrange para encontrar la distancia más corta del plano  $x + 2y + z = 6$  al origen.

Sea  $d$  la distancia del origen al punto  $(x, y, z)$  del plano. Entonces

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

dado que  $d \geq 0$  y continua, alcanza un mínimo cuando  $d^2$  alcanza un mínimo. Con esta consideración, podemos encontrar el valor mínimo de

$$d^2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

sujeta a la restricción

$$x + 2y + z - 6 = 0.$$

Si suponemos que existe el valor mínimo, éste ocurrirá en un valor crítico de

$$L(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x + 2y + z - 6).$$

Se calculan los puntos críticos de  $L$

$$\begin{cases} L_x : 2x + \lambda = 0. \\ L_y : 2y + 2\lambda = 0. \\ L_z : 2z + \lambda = 0. \\ L_\lambda : x + 2y + z - 6 = 0. \end{cases}$$

A partir de las primeras tres ecuaciones se obtiene

$$x = -\frac{\lambda}{2}, \quad y = -\lambda, \quad z = -\frac{\lambda}{2}$$

si se sustituyen estos valores en la cuarta ecuación resulta

$$\lambda = 2$$

sustituyendo el los valores de  $x, y$  y  $z$  se obtiene

$$x = 1, \quad y = 2, \quad z = 1$$

El punto que tiene estas coordenadas es el único punto crítico de  $L$ . Por lo tanto la distancia mínima del plano  $x+2y+z = 6$  al origen, es la distancia que hay entre el punto  $(1, 2, 1)$  y el origen, en consecuencia la distancia mínima es

$$d = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

## 1.5. Elemento finito

En esta sección se definen las ideas básicas del método de elemento finito, mismas que se necesitan para la implementación de los ejemplos que se muestran en el capítulo 4. Para tal fin se procede a describir esas ideas como una serie de pasos:

EF1. Dado un dominio  $\Omega$  se hace una discretización de él por medio de una familia de triángulos la cual se denota por  $\tau_h$  y sus elementos por  $K$ , los cuales satisfacen (ver figura 1.2)

- 1)  $\overline{\Omega} = \cup K$ .
- 2)  $\overset{\circ}{K}_i \cap \overset{\circ}{K}_j = \phi$  para  $i \neq j$ . ( $\overset{\circ}{K}$  = interior de  $K$ ).
- 3) Si  $K_i$  y  $K_j$  son adyacentes, dos de sus vértices deben coincidir, es decir, no se permite que un vértice de  $K_i$  sea punto interior de una arista de  $K_j$ .

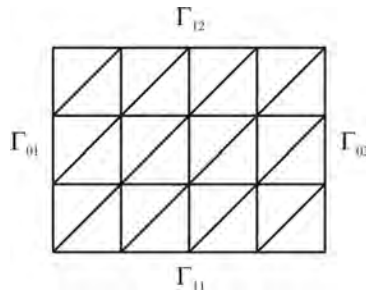


Figura 1.2: Un ejemplo de triangulación de un dominio  $\Omega$ .

Este tipo de triangulación da lugar a la definición de malla triangular, la cual se da a continuación.

**Definición 1.5.1.** Una malla triangular para un dominio  $\Omega$  en el plano, consiste de un conjunto de vértices descritos por sus coordenadas y de un conjunto de triángulos, a los cuales se les llama nodos y elementos de la malla respectivamente, (en casos complicados puede requerirse de un arreglo de aristas). Al mallado del dominio o región plana  $\Omega$  se le llama discretización.

Es necesario que los vértices y los triángulos se puedan identificar y esto lo haremos mediante una numeración para los nodos y los elementos de la malla; así podremos también conocer los nodos que conforman a cada elemento.

Además debe establecer un orden en los vértices de los elementos, es decir, decidir qué nodo corresponde al primer vértice y la orientación en la cual recorreremos los demás y asociarles el número de nodo correspondiente. Esto nos lleva a tener una numeración de nodos globales y numeración de nodos locales, donde la numeración global corresponde al orden establecido para contar los nodos de la malla sin tener en cuenta los triángulos y la numeración de nodos locales son los que nos indican qué nodos forman a cada elemento, de esta manera podemos decir que una malla consiste de dos arreglos principales

1. Arreglo de las coordenadas de los nodos.
2. Arreglo de los elementos.

La numeración de nodos y elementos no es única, ya que cada cada programador podría numerarlos como lo desee, sin embargo si se desean hacer cálculos computacionales con ellos es bueno establecer esta numeración de la manera más sencilla posible, por ejemplo numerar los nodos de manera consecutiva respecto a su cercanía. Ahora bien, los elementos los numeramos estableciendo reglas para recorrerlos todos de la forma más sencilla. Los identificamos por la numeración escogida y por cada nodo que lo conforma. Luego, la malla entonces será el arreglo que contiene las coordenadas de cada nodo global y el arreglo que nos da las coordenadas de cada nodo local, es decir, los nodos de cada elemento, un ejemplo de malla triangular se muestra en la figura (1.3). A menudo la discretización inicial no es la apropiada a las

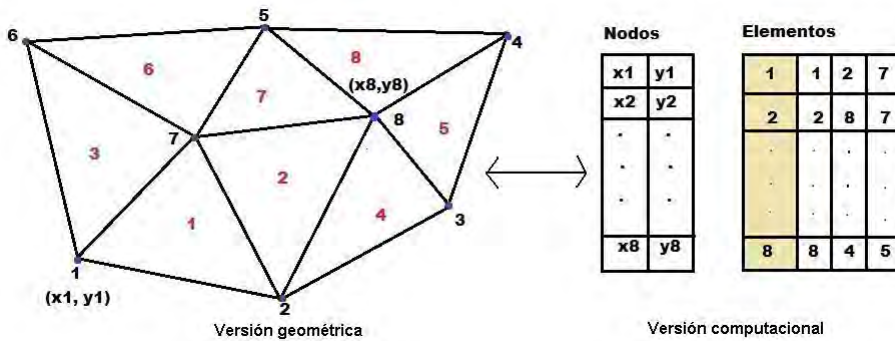


Figura 1.3: Malla triangular.

características del problema y por ello puede no ser definitiva. Tal es el caso en problemas en donde se desea precisar más la resolución o en regiones con

alta no linealidad donde la única forma de representar fielmente la región es refinando la discretización local. Un refinamiento o derefinamiento local de la malla no debería implicar una reconstrucción completa de las estructuras de datos que modelan la malla, al contrario, esta debe de ser de carácter local habida cuenta del costo computacional que ello conllevaría. Así que un refinamiento es hacer una subdivisión regular de los elementos de la malla dada. Esto se consigue tomando los puntos medios de cada arista de cada elemento, lo cual genera cuatro pequeños elementos que dependerán de cada triángulo de la malla grande. La subdivisión de mallas tiene varias aplicaciones en la resolución numérica de problemas, la más común es generar mejores resultados, es decir, obtener una mejor resolución de las variables que intervienen en el problema, por lo que que podremos tener datos más precisos sobre una parte de nuestra región  $\Omega$ .

Para la modelación de problemas físicos es necesario conocer la solución de algunas ecuaciones diferenciales parciales. Considerando que en una región irregular no es posible obtener una solución analítica, se recurre a los métodos numéricos para aproximar la solución. La discretización del dominio es un problema a resolver necesario para algunos métodos numéricos. Cuando se tiene una malla no-estructurada, la técnica más usual para resolver numéricamente EDP's es el método de elemento finito (MEF). La precisión del método mejora si la calidad de la malla es buena, es decir, cuanto más fina sea la malla el resultado será mejor. Con ello podemos verificar la propiedad de convergencia del MEF salvo limitaciones de redondeo. Para mayores referencias ver [Y].

EF2. Se definen algunos conjuntos y funciones que servirán para definir un espacio al que llamaremos espacio de elemento finito. Con la triangulación anterior de  $\Omega$  se asocian:

**Definición 1.5.2.** Para  $K \in \tau_h$  y  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  se define

$$P_1(K) = \{p : K \rightarrow \mathbb{R} \mid p(x, y) = a + bx + cy, \forall a, b, c \in \mathbb{R}\},$$

$$H_h(\Omega) = \{v \in C^0(\Omega) : v|_K \in P_1(K), \forall K \in \tau_h\},$$

$$V_h(\Omega) = \{v \in H_h(\Omega) : v = g_0 \text{ sobre } \Gamma_0\},$$

$$W_h(\Omega) = \{v \in H_h(\Omega) : v(n_j) = 0, \forall n_j \in \Gamma_0\}.$$

Es fácil ver que  $H_h$  es un espacio vectorial y que una base son las funciones

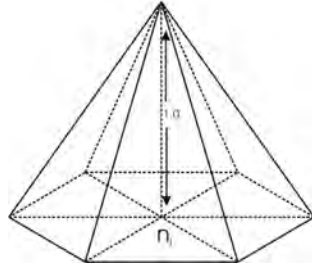


Figura 1.4: función de base local  $v_i^h$  definida en el nodo  $n_i$ .

$v_i^h$  que están en  $H_h$  y que toman los siguientes valores:

$$v_i^h(n_j) = \delta_{ij}$$

para  $n_j$  un vértice o nodo de la triangulación  $\tau_h$ . Se supone que los vértices están etiquetados o numerados de 1 a  $N$ . Entonces la base de  $H_h$  consta de tantos elementos como nodos tenga la triangulación. La base de  $W_h$  son las funciones  $v_i^h$  asociadas con los nodos interiores y con los de  $\Gamma_1$  de la triangulación de  $\Omega$ . Es fácil ver que las  $v_i^h$  son linealmente independientes y que cualquier función  $u \in V_h$  se puede escribir como una combinación lineal de ellas, esto es,  $\{v_i^h\}_{i=1}^N$  es una base para  $H_h$ . En la figura (1.4) se ilustra una función base  $v_i^h$ . A los espacios  $H_h$  y  $W_h$  que se forman con los pasos anteriores se les llama espacios de elemento finito.

A continuación se muestra un ejemplo en el que se resuelve un problema de ecuaciones diferenciales por el método de elemento finito.

Considérese el siguiente problema elíptico con condiciones de frontera:

$$-\nu \Delta u + \alpha u = f, \text{ en } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad (1.18)$$

$$u = g_0 \text{ sobre } \Gamma_0, \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g_1 \text{ sobre } \Gamma_1, \quad (1.20)$$

donde  $\nu > 0$ ,  $\alpha \geq 0$ ,  $\Omega$  es un rectángulo abierto cuya frontera  $\Gamma = \partial\Omega$  es la unión disjunta de  $\Gamma_0$  y  $\Gamma_1$ . Ver figura (1.5). Como puede verse en [LCJ], la forma variacional débil del (1.18)-(1.20) es:

$$\nu \int_{\omega} \nabla u \cdot \nabla v dx dy + \alpha \int_{\omega} u v dx dy = \int_{\omega} f v dx dy + \int_{\gamma_1} g_1 v d\gamma, \forall v \in W \quad (1.21)$$



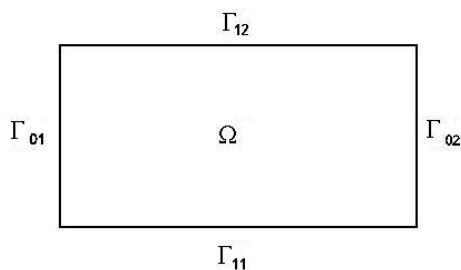


Figura 1.5: Dominio rectangular  $\Omega$  para el problema (1.18)-(1.20).

Una función  $u$  que satisface (1.21) se llama una solución débil de (1.18)-(1.20). La forma variacional del problema en base al teorema de Stampachia (ver [BRE], pp. 176) es:

$$u = \min_{v \in V} \left\{ \frac{1}{2} \left( \nu \int_{\omega} |\nabla v|^2 + \alpha \int_{\omega} v^2 - 2 \int_{\omega} f v - 2 \int_{\gamma_1} g_1 v \right) \right\}. \square \quad (1.22)$$

Así que existe una única solución débil para el problema (1.18)-(1.20) y se tiene que si  $f$ ,  $g_0$  y  $g_1$  son suficientemente suaves (continuas, por ejemplo), entonces la solución débil también es la solución clásica.

Sustituyendo los espacios abstractos por los espacios  $V_h$  y  $W_h$  construídos anteriormente y en la formulación variacional (1.21) se obtiene:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } u_h \in V_h \text{ tal que} \\ a(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle, \forall v_h \in W_h, \end{cases} \quad (1.23)$$

donde

$$a(u_h, v_h) = \nu \int_{\omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h + \alpha \int_{\omega} u_h v_h$$

y

$$\langle f, v_h \rangle = \int_{\omega} f v_h + \int_{\gamma_1} g_1 v_h d\gamma.$$

Asumiendo que  $\{v_1^h, \dots, v_n^h, v_{n+1}^h, \dots, v_N^h\}$  es la base para  $H_h$  y  $\{v_1^h, \dots, v_n^h\}$  es la base para  $W_h$  se tiene que si  $u = (u_1, \dots, u_N)$  es el vector de aproximación para la solución  $u$ :

$$u_j = u_h(n_j), \quad j = 1, \dots, N.$$

para  $n_j$  el nodo  $j$  de la discretización de  $\omega$  entonces  $u_j = g_0(n_j)$  para  $j = n + 1, \dots, N$ ,

$$u_h = \sum_{j=1}^N u_j v_j^h,$$

y que las  $u_j$  deben satisfacer

$$\sum_{j=1}^n u_j a(v_i^h, v_j^h) = \langle f, v_i^h \rangle - \sum_{j=n+1}^N u_j a(v_i^h, v_j^h), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.24)$$

o equivalentemente

$$Au = b, \quad (1.25)$$

donde  $a_{ij} = a(v_i^h, v_j^h)$  y  $b_i = \langle f, v_i^h \rangle - \sum_{j=n+1}^N u_j a(v_i^h, v_j^h)$ . La matriz  $A$  es simétrica y definida positiva, por lo cual el vector solución  $u$  existe y es único, así que la aproximación  $u_h$  a la solución  $u$  existe y es única. Para el cálculo de los elementos de la matriz  $A$  se hace uso de la propiedad de aditividad de la integral y de la forma en que se discretizó el dominio  $\omega$ :

$$a_{ij} = \sum_{K \in \tau_h} \int_K (\nu \nabla v_i^h \cdot \nabla v_j^h + \alpha v_i^h v_j^h).$$

Nótese que  $a_{ij} = 0$  si el nodo  $n_j$  no es vértice de algún triángulo del que  $n_i$  sea vértice.

Para calcular  $A$  recordemos la definición de la base  $\{v_i\}_1^N$  para  $H_h$ , la cual satisface

$$v_i(n_j) = \delta_{ij},$$

donde  $n_j$  representa al nodo  $j$  de la triangulación  $\tau_h$  para  $\omega$ , y se considera que

$$v_i|_K = a_k + b_k x + c_k y,$$

para cada  $K \in \tau_h$ . Se sabe que las funciones base locales se pueden definir en términos de las coordenadas de los nodos que definen  $K$ . Se sabe también que

$$a_{ij} = a_\omega(v_i, v_j) = \sum_{K \in \tau_h} a_K(v_i, v_j) = \sum_{K \in \tau_h} \int_K (\alpha v_i v_j + \nu \nabla v_i \cdot \nabla v_j) dx.$$

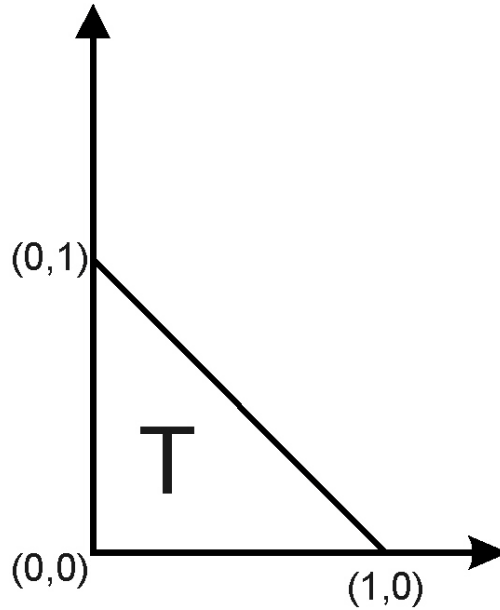


Figura 1.6: Triángulo canónico  $K^e$ .

Entonces los cálculos se hacen elemento por elemento y se acumulan en el respectivo  $a_{ij}$ . Para cada  $a_{ij}$ , deben calcularse integrales de la forma  $\int_K (v_i v_j) dx$  e integrales de la forma  $\int_K \nabla v_i \cdot \nabla v_j dx$ , donde  $K$  es cada uno de los elementos de la triangulación. Para el cálculo de  $\int_K (v_i v_j) dx$  se usa el triángulo canónico  $K^e$  en donde hacer los cálculos. Este se muestra en la figura (1.6).

La transformación afín involucrada aquí es definida por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T_K \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}. \quad (1.26)$$

donde  $T_K = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}$  y  $(x_i, y_i)$  son las coordenadas del nodo local  $i$ . Obsérvese que el vértice  $(0, 0)$  del triángulo canónico se transforma en el nodo local 1, el vértice  $(1, 0)$  se transforma en el nodo local 2 y el vértice  $(0, 1)$  se transforma en el nodo local 3.

Las funciones base locales en  $K$ , en términos de las coordenadas de los nodos locales son

$$v_1^K(x, y) = \frac{1}{2\text{Area}(K)} [x_2y_3 - y_2x_3 + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y]$$

$$v_2^K(x, y) = \frac{1}{2\text{Area}(K)} [x_3y_1 - y_3x_1 + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] \quad (1.27)$$

$$v_3^K(x, y) = \frac{1}{2\text{Area}(K)} [x_1y_2 - y_1x_2 + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] \quad (1.28)$$

y las funciones base locales en  $K^e$  son

$$\begin{aligned} v_1^e(\varepsilon, \eta) &= 1 - \varepsilon - \eta \\ v_2^e(\varepsilon, \eta) &= \varepsilon \\ v_3^e(\varepsilon, \eta) &= \eta \end{aligned}$$

y se tiene que

$$\begin{aligned} \int_K (v_i^K v_j^K) dx &= \int_{K^e} (v_i^e v_j^e) |\det(T_K)| d\varepsilon d\eta = \\ &= |\det(T_K)| \int_{K^e} (v_i^e v_j^e) d\varepsilon d\eta = \begin{cases} 2 \frac{|\det(T_K)|}{24} & \text{si } i = j \\ \frac{|\det(T_K)|}{24} & \text{si } i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

Si previamente se han calculado los gradientes de las funciones base locales de cada triángulo y las áreas de los triángulos, lo cual se puede hacer a partir de (1.27), as como el valor absoluto del determinante de las transformaciones  $T_K$ , que se puede obtener como  $2 * \text{Area}(K)$ , se tiene el resultado de la integral anterior y además el de  $\int_K \nabla v_i \cdot \nabla v_j dx$ , pues su valor es  $(\nabla v_i \cdot \nabla v_j) \text{Area}(K)$ . Por lo cual solo es necesario acumular el resultado en la posición adecuada del vector donde se guarda la matriz  $A$  en el cual también se ha incluido la participación del triángulo  $K$  a la última sumatoria del lado derecho en (1.24), es decir, se ha calculado una de las partes del vector  $b$ .

**Cálculo de  $\int_{\omega} f v_i dx$ , para cada  $i = 1, \dots, n$ .**

Otra contribución para el lado derecho  $b$  son las integrales  $\int_{\omega} f v_i dx$ , para el cálculo de las cuales se considera que  $f$  es una función definida en cada nodo de la triangulación de  $\omega$ . Entonces se puede escribir

$$f = \sum_{j=1}^N f_j v_j,$$

donde  $f_j$  representa el valor de  $f$  en el nodo  $j$ :  $f_j = f(n_j)$ . Así que

$$\int_{\omega} f v_i dx = \int_{\omega} \left( \sum_{j=1}^N f_j v_j \right) v_i dx = \sum_{j=1}^N f_j \int_{\omega} v_i v_j dx.$$

Puede entonces escribirse el vector

$$\begin{pmatrix} \int_{\omega} f v_1 dx \\ \vdots \\ \int_{\omega} f v_n dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \int_{\omega} v_1 v_1 dx + f_2 \int_{\omega} v_1 v_2 dx + \dots + f_N \int_{\omega} v_1 v_N dx \\ \vdots \\ f_1 \int_{\omega} v_N v_1 dx + f_2 \int_{\omega} v_N v_2 dx + \dots + f_N \int_{\omega} v_N v_N dx \end{pmatrix}, \quad (1.29)$$

el cual es la otra contribución requerida. Luego utilizando otra vez la aditividad de la integral sobre el dominio de integración y puesto que para cada elemento o triángulo  $K$  de la discretización existen tres funciones base locales  $v_i^K$  se debe calcular

$$\int_K v_l^K v_p^K dx,$$

para  $l = 1, 2, 3$ ,  $p = 1, 2, 3$  y para cada triángulo  $K$ . Los índices  $l$  y  $p$  denotan funciones base locales o nodos locales por lo cual  $l$  y  $p$  tienen asociados sus respectivos nodos globales o funciones base globales. Sean  $i, j$  los nodos globales asociados con los índices  $l$  y  $p$ , respectivamente. Entonces el valor

$$f_j \int_K v_l^K v_p^K dx,$$

se acumula a la componente  $j$  del vector en (1.29) y el valor

$$f_i \int_K v_l^K v_p^K dx,$$

se acumula a la componente  $i$  del vector en (1.29). De acuerdo a estas fórmulas, el vector  $b$  se va ensamblando simultáneamente con el cálculo de la matriz  $A$ , teniendo en cuenta que el vector  $b$  tiene solo  $n$  componentes.

La última participación para  $b$  son las integrales de la forma

$$\int_{\gamma_1} g_1 v_h d\gamma.$$

Las cuales son integrales de línea y se pueden calcular numéricamente.

Debe notarse que aunque los dominios considerados en este trabajo son rectangulares, y las mallas son estructuradas, lo cual obedece a que estos se pueden generar automáticamente sin muchas complicaciones, los demás detalles no tienen esta limitante, es decir, funcionarían para una malla no estructurada sobre un dominio irregular



## Capítulo 2

# Generación de campos de velocidades

En este capítulo se estudia un modelo del tipo de masa consistente para ajuste de campos de velocidades en dos dimensiones, a partir de datos discretos que representan medidas sobre un dominio  $\Omega$ , esto es, dado un campo inicial  $\mathbf{u}^f$  el objetivo es encontrar un campo ajustado  $\mathbf{u}$  tan cercano como sea posible al inicial y que cumpla la ecuación de continuidad y la propiedad de resbalamiento. El conjunto  $\Omega$  se considera una región en  $\mathbb{R}^2$  con frontera  $\partial\Omega$ , la cual está dada por  $\partial\Omega = \Gamma_N \cup \Gamma_V \cup \Gamma_D$ , en el caso de campos de viento, y para el caso de agua  $\partial\Omega = \Gamma_N \cup \Gamma_V$ , donde  $\Gamma_N$  es la frontera natural, y  $\Gamma_V \cup \Gamma_D$  es el resto de la frontera, la cual es una frontera artificial, como se muestra en la figura (2.1). El precedente para este trabajo es el método

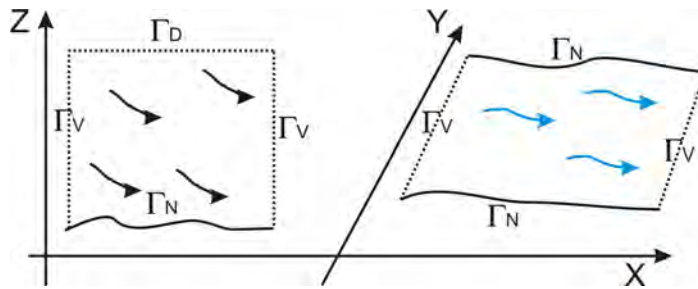


Figura 2.1: Regiones 2D para campos de velocidad

variacional propuesto por Sasaki [SY], que usa la ecuación de continuidad



$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , donde  $\mathbf{u}$  es el campo de velocidad en un dominio dado  $\Omega$ . El método se basa en la minimización de un funcional  $L$  definido mediante:

$$L(\mathbf{u}, \lambda) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{S(\mathbf{u} - \mathbf{u}^I) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}^I) + \lambda \nabla \cdot \mathbf{u}\} d\mathbf{x}, \quad (2.1)$$

donde  $\mathbf{u}^I$  es un campo inicial observado,  $\lambda$  es un multiplicador de Lagrange y  $S$  es una matriz diagonal con parámetros de peso  $\alpha_i$  positivos para  $i=1,2$ , llamados módulos de precisión de Gauss, relacionado con las escalas de las respectivas componentes del campo de velocidades. De las ecuaciones de Euler-Lagrange aplicadas a (2.1) se obtiene:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^I + S^{-1} \nabla \lambda. \quad (2.2)$$

Por lo general  $\mathbf{u}$  se obtiene de (2.2) después de haber calculado  $\lambda$ . Como se cumple que  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , a partir de ello se obtiene  $\lambda$ . Para complementar esta ecuación, se usa comúnmente dos tipos de condiciones de frontera: condiciones de frontera homogéneas tipo Dirichlet,  $\lambda=0$  para fronteras abiertas o "con flujo a través de ellas" y condiciones de frontera tipo Neumann ( $\partial\lambda/\partial\mathbf{n} = 0$ ) para fronteras cerradas o "sin flujo a través de ellas" (superficie de terreno o márgenes de río o topografía). Muchos autores han recomendado estas condiciones de frontera, sin embargo son tanto física como matemáticamente inconsistentes según se muestra en [JHL1]. A pesar de que ha habido varios desarrollos sofisticados en simulaciones numéricas de este modelo como por ejemplo la aplicación de modelos multimalla y la aplicación de algoritmos genéticos para estimación de parámetros, parece que el análisis de condiciones de frontera no ha atraído la atención de la comunidad meteorológica. Cuando el problema se aborda desde el punto de vista de un problema elíptico la aplicación incorrecta de las condiciones de frontera puede degradar la solución en varios órdenes de magnitud.

La alternativa que se explora en este capítulo es introducir una nueva aproximación basada en la formulación de un problema de punto silla, lo cual permite la implementación de técnicas de dinámica computacional de fluidos para aproximar tanto el multiplicador como el campo ajustado, utilizando un algoritmo de gradiente conjugado. Esto tiene como ventaja que no se requieren condiciones de frontera para el multiplicador.

## 2.1. Campos de velocidades de viento

En la práctica, las medidas de campo de viento están limitadas a las componentes horizontales, por lo tanto las medidas verticales deben predecirse o calcularse. Los modelos bidimensionales son una buena opción para estudiar el comportamiento de estos fenómenos, aunque los errores asociados a las mediciones y a la dispersión de los datos obtenidos complican calcular un campo que esté definido sobre todo el dominio. La propuesta que se hace para la construcción del campo inicial es: a partir de los valores de la velocidad del viento y de su dirección obtenidos de las medidas reales, mediante algún método de interpolación en  $2D$  generar el campo inicial sobre todo el dominio.

La ecuación de continuidad de masa sobre el dominio bidimensional a estudiar  $\Omega$  y la condición de impenetrabilidad sobre  $\Gamma_N$  son respectivamente:

$$\nabla \mathbf{u} = 0 \text{ en } \Omega$$

$$\mathbf{u} \cdot \vec{n} = 0 \text{ en } \Gamma_N$$

La figura (2.2) muestra un dominio para campos de viento. En el caso elíptico,  $\Gamma_V$  unido a  $\Gamma_D$  representan la frontera artificial y  $\Gamma_N$  la frontera natural. Condiciones aceptables en la frontera artificial para este caso son:  $\lambda = 0$  en  $\Gamma_D$  y  $\mathbf{u} \cdot \vec{n} = \mathbf{u}^T \cdot \vec{n}$  en  $\Gamma_V$ , como se ve en [FJNM]. En el enfoque de gradiente conjugado que se estudia en ésta tesis sólo se pide la condición de resbalamiento.

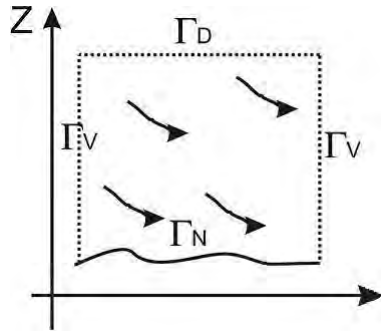


Figura 2.2: Regiones 2D para campos de viento.

Ya que tenemos el campo inicial  $\mathbf{u}^I$  en todo el dominio, el siguiente paso es encontrar un campo  $\mathbf{u}_a$  que llamamos campo ajustado, y cumple:

1.  $\nabla \cdot \mathbf{u}_a = 0$ , es decir tiene la propiedad de conservación de masa.
2.  $\mathbf{u}_a$  en algún sentido, debe ser el más cercano a  $\mathbf{u}^I$ .

## 2.2. Campos de velocidades para agua

Los flujos de agua se pueden representar adecuadamente mediante un campo bidimensional promediado en profundidad, los datos pueden provenir de mediciones directas o de registros que se tengan en bases de datos, un dominio para modelar campos de velocidades de agua puede considerarse como el que se muestra en la figura (2.3).

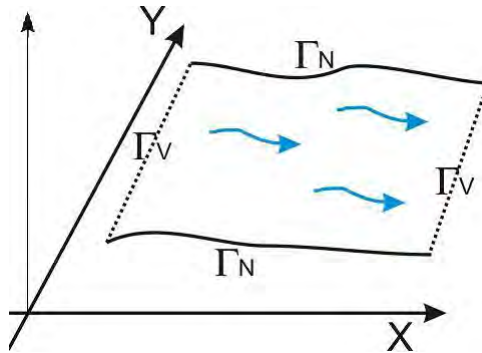


Figura 2.3: Regiones 2D para campos de agua.

En este caso, la frontera tiene una parte artificial  $\Gamma_V$  y la frontera natural  $\Gamma_N$  asociada al terreno, las condiciones de frontera para este caso son:  $\mathbf{u} \cdot \vec{n} = \mathbf{u}^I \cdot \vec{n}$  en  $\Gamma_V$  y  $\mathbf{u} \cdot \vec{n} = 0$  en  $\Gamma_N$  para el caso elíptico como se ve en [LRJA]. En el método de gradiente conjugado sólo se pide la propiedad de resbalamiento. La idea de ajustar este tipo de campos es la misma que la expresada en la sección anterior.

## 2.3. Campos de velocidades generales

Sea  $\mathbf{u}^I$  un campo inicial en  $\Omega$ , el cual se obtiene de las mediciones de velocidades reales, nuestro objetivo es generar un campo  $\mathbf{u}$  que llamamos

campo ajustado, que en algun sentido esté tan cerca de  $\mathbf{u}^I$  como sea posible, y tal que  $\Gamma_N$  sea impenetrable por  $\mathbf{u}$ , que en lenguaje matemático significa que  $\mathbf{u} \cdot \vec{n} = 0$  en  $\Gamma_N$

Esto significa que nuestro problema exige soluciones en el subespacio de  $\mathbf{H}(\text{div}; \Omega)$  que denotamos por  $\mathbf{V}$  y que esta definido como,

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega) \mid \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ y } \mathbf{v} \cdot \vec{n} = 0 \text{ en } \Gamma_N\}$$

El cual equipamos con la métrica definida por la norma  $\|\cdot\|_{s,\Omega}$  asociada al producto interior definido en (1.10).

Antes de hacer uso de ésta manera de medir distancia verifiquemos que  $\|\cdot\|_{s,\Omega}$  satisface las propiedades de norma:

1. Positividad:

$$\|U\|_{s,\Omega} = \sqrt{\int_{\Omega} S(U) \cdot U dx} \geq 0$$

ya que

$$\int_{\Omega} U^T S U dx \geq 0$$

por positividad de  $S$ .

$$\text{y } \int_{\Omega} U^T S U dx = 0 \text{ si } U = 0$$

2. Multiplicación por un escalar:

$$\begin{aligned} \|\lambda U\|_{s,\Omega} &= \sqrt{\int_{\Omega} S(\lambda U) \cdot \lambda U dx} \\ &= \sqrt{\int_{\Omega} \lambda U^T S \lambda U dx} \\ &= \sqrt{\int_{\Omega} \lambda^2 U^T S U} \\ &= \sqrt{\lambda^2 \int_{\Omega} U^T S U dx} \\ &= |\lambda| \sqrt{\int_{\Omega} U^T S U dx} \end{aligned}$$

$$= |\lambda| \|U\|$$

3. Desigualdad del triángulo.

$$\begin{aligned} \|U + V\|_{s,\Omega}^2 &= \int_{\Omega} (U + V)^T S(U + V) dx \\ &= \int_{\Omega} (U^T + V^T) S(U + V) \\ &= \int_{\Omega} (U^T S(U + V) + V^T S(U + V)) dx \\ &= \int_{\Omega} U^T S U + U^T S V + V^T S U + V^T S V \\ &= \int_{\Omega} U^T S U dx + \int_{\Omega} U^T S V dx + \int_{\Omega} V^T S U dx + \int_{\Omega} V^T S V dx \\ &= \|U\|_{s,\Omega}^2 + 2\langle U, V \rangle + \|U\|_{s,\Omega}^2 \\ &\leq \|U\|_{s,\Omega}^2 + 2| \langle U, V \rangle | + \|U\|_{s,\Omega}^2, \quad \text{por la desigualdad de cauchy-schwartz} \\ &\leq \|U\|_{s,\Omega}^2 + 2\|U\|_{s,\Omega}\|V\|_{s,\Omega} + \|U\|_{s,\Omega}^2 \\ &= (\|U\|_{s,\Omega} + \|V\|_{s,\Omega})^2 \end{aligned}$$

es decir:

$$\|U + V\|_{s,\Omega}^2 \leq (\|U\|_{s,\Omega} + \|V\|_{s,\Omega})^2$$

de donde se obtiene:

$$\|U + V\|_{s,\Omega} \leq \|U\|_{s,\Omega} + \|V\|_{s,\Omega}.$$

De 1, 2 y 3 se concluye que  $\|\cdot\|_{s,\Omega}$  es una norma.

Con la distancia de  $u^I$  a un  $v \in \mathbf{V}$  definimos el siguiente funcional:

$$J : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$J(v) = \frac{1}{2} \|v - u_0\|_{s,\Omega}^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (S(v - u_0)) \cdot (v - u_0) dx \quad (2.3)$$

de ésta manera el problema para generar el campo de velocidad ajustado  $u$  puede formularse como sigue:

$$\text{Dado } u^I \in \mathbf{H}(\text{div}; \Omega) \text{ encontrar } u \in \mathbf{V} \text{ tal que } J(u) \leq J(v) \forall v \in \mathbf{V}. \quad (2.4)$$

**Afirmación 2.3.1** (Convexidad). El funcional  $J$  es cuadrático y convexo.

*Demostración.* Para demostrar ésta afirmación usamos  $J$  en la forma  $J = \frac{1}{2} \|v - u_0\|_{S\Omega}^2$ , ya que esto nos permite explotar las propiedades de la norma, lo cual nos facilita la demostración.

Observemos que,

$$\begin{aligned} \|\lambda u + (1 - \lambda)v - u_0\|_{s,\Omega} &= \|\lambda u + (1 - \lambda)v - u_0 + \lambda u_0 - \lambda u_0\|_{s,\Omega} \\ &= \|\lambda(u - u_0) + (1 - \lambda)(v - u_0)\|_{s,\Omega} \leq \lambda\|(u - u_0)\|_{s,\Omega} + (1 - \lambda)\|(v - u_0)\|_{s,\Omega} \end{aligned}$$

lo que significa que,

$$\|\lambda u + (1 - \lambda)v - u_0\|_{s,\Omega} \leq \lambda\|(u - u_0)\|_{s,\Omega} + (1 - \lambda)\|(v - u_0)\|_{s,\Omega} \quad (2.5)$$

Ahora estimamos:

$$\begin{aligned} &\lambda\|(u - u_0)\|_{s,\Omega}^2 + (1 - \lambda)\|(v - u_0)\|_{s,\Omega}^2 - [\lambda\|(u - u_0)\|_{s,\Omega} + (1 - \lambda)\|(v - u_0)\|_{s,\Omega}]^2 \\ &= \lambda\|(u - u_0)\|_{s,\Omega}^2 + (1 - \lambda)\|(v - u_0)\|_{s,\Omega}^2 - [\lambda^2\|(u - u_0)\|_{s,\Omega}^2 \\ &\quad - 2\lambda(1 - \lambda)\|(u - u_0)\|_{s,\Omega}\|(v - u_0)\|_{s,\Omega} + (1 - \lambda)^2\|(v - u_0)\|_{s,\Omega}^2] \\ &= \lambda(1 - \lambda)\|(u - u_0)\|_{s,\Omega}^2 + 2\lambda(1 - \lambda)\|(u - u_0)\|_{s,\Omega}\|(v - u_0)\|_{s,\Omega} \\ &\quad + \lambda(1 - \lambda)\|(v - u_0)\|_{s,\Omega}^2 \\ &= \lambda(1 - \lambda)[\|(u - u_0)\|_{s,\Omega} - \|(v - u_0)\|_{s,\Omega}]^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\sqrt{\lambda\|(u - u_0)\|_{s,\Omega}^2 + (1 - \lambda)\|(v - u_0)\|_{s,\Omega}^2} \geq \lambda\|(u - u_0)\|_{s,\Omega} + (1 - \lambda)\|(v - u_0)\|_{s,\Omega}$$

$$\geq \|\lambda u + (1 - \lambda)v - u_0\|_{s,\Omega} \quad \text{por 2.5}$$

elevando al cuadrado y multiplicando por  $\frac{1}{2}$  obtenemos:

$$\frac{1}{2}\lambda\|(u - u_0)\|^2 + (1 - \lambda)\|(v - u_0)\|_{s,\Omega}^2 \leq \frac{1}{2}\lambda\|(u - u_0)\|_{s,\Omega}^2 + \frac{1}{2}(1 - \lambda)\|(v - u_0)\|_{s,\Omega}^2$$

Así:

$$J(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda J(u) + (1 - \lambda)J(v)$$

$\therefore J(v)$  es convexo. ◀

**Afirmación 2.3.2.**  $J(u + \epsilon v) = J(u) + \epsilon J^{(1)}(u; v) + \frac{\epsilon^2}{2} J^{(2)}(u; v)$ , para todo  $\epsilon \in \mathbb{R}$  y  $u, v \in V$ ,

Donde  $J^{(1)}(u; v)$  y  $J^{(2)}(u; v)$  denotan la primera y segunda variación de  $J$  respectivamente, dadas por:

$$J^{(1)}(u; v) = \int_{\Omega} (S(u - u^I)) \cdot v dx \quad (2.6)$$

$$J^{(2)}(u; v) = \int_{\Omega} (Sv) \cdot \cdot dx. \quad (2.7)$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} 1. \quad J(u + \epsilon v) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (S(u + \epsilon v - u^I)) \cdot (u + \epsilon v - u^I) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (S(u + \epsilon v - u^I))^T (u + \epsilon v - u^I) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (S(u^T + \epsilon v^T - (u^0)^T))^T (u + \epsilon v - u^I) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} [u^T S(u + \epsilon v - u^I) + \epsilon v^T S(u + \epsilon v - u^I) - (u^0)^T S(u + \epsilon v - u^I)] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} [u^T S u + \epsilon u^T S v - u^T S u^I + \epsilon v^T S u + \epsilon^2 v^T S v - \epsilon v^T S u^I] dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (u^0)^T S u - \epsilon (u^0)^T S v - (u^0)^T S u^I] dx \\
& = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^T S u dx - \int_{\Omega} u^T S u^I dx - \int_{\Omega} (u^0)^T S u dx + \int_{\Omega} (u^0)^T S u^I dx \\
& + 2\epsilon \int_{\Omega} u^T S v dx - 2\epsilon \int_{\Omega} v^T S u^I dx + \epsilon^2 \int_{\Omega} v^T S v dx
\end{aligned}$$

2. Por otro lado

$$\begin{aligned}
& J(u) + \epsilon J^{(1)}(u; v) + \frac{\epsilon^2}{2} J^{(2)}(u; v) \\
& = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (S(u - u^I)) \cdot (u - u^I) dx + \epsilon \int_{\Omega} (S(u - u^I)) \cdot v + \frac{\epsilon^2}{2} \int_{\Omega} (Sv) \cdot v dx \\
& = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u - u^I)^T S (u - u^I) dx + \epsilon \int_{\Omega} (u - u^I)^T S v + \frac{\epsilon^2}{2} \int_{\Omega} v^T S v dx \\
& = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u^T - (u^I)^T) S (u - u^I) dx + \epsilon \int_{\Omega} (u^T - (u^I)^T) S v + \frac{\epsilon^2}{2} \int_{\Omega} v^T S v dx \\
& = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [u^T S (u - u^I) - (u^I)^T S (u - u^I)] dx + \epsilon \int_{\Omega} [u^T S v - (u^I)^T S v] dx + \\
& \frac{\epsilon^2}{2} \int_{\Omega} v^T S v dx \\
& = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^T S u dx - \int_{\Omega} u^T S u^I dx - \int_{\Omega} (u^0)^T S u dx + \int_{\Omega} (u^0)^T S u^I dx \\
& + \epsilon \int_{\Omega} u^T S v dx - \epsilon \int_{\Omega} (u^I)^T S v dx + \frac{\epsilon^2}{2} \int_{\Omega} v^T S v dx.
\end{aligned}$$

De 1 y 2 se concluye que:

$$J(u + \epsilon v) = J(u) + \epsilon J^{(1)}(u; v) + \frac{\epsilon^2}{2} J^{(2)}(u; v) \text{ para todo } \epsilon \in \mathbb{R} \text{ y } u, v \in V. \blacktriangleleft$$

$J$  tiene un mínimo en  $u$ , sí y solo sí

$$\int_{\Omega} (S(u - u^I)) \cdot v dx = 0 \quad \forall v \in V$$

$$\int_{\Omega} (S u) \cdot u dx \geq 0$$



**Observación 2.3.3.**  $\int_{\Omega} (Sv) \cdot v dx = \int_{\Omega} v^T \cdot (Sv) dx \geq 0 \quad \forall v \in V$

Con esta observación se descarta la existencia de máximos locales y puntos silla. Así cualquier valor extremo de  $J$  es un mínimo. Por lo que una condición necesaria y suficiente para que  $J$  tenga un mínimo  $u \in V$  es que:

$$\int_{\Omega} (S(u - u^I)) \cdot v dx = 0 \quad \forall v \in V. \quad (2.8)$$

La ecuación anterior podemos escribirla de la siguiente forma,

$$\langle u, v \rangle - \langle u^I, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V,$$

o equivalentemente,

$$\langle u, v \rangle = \langle u^I, v \rangle \quad \forall v \in V.$$

Tomando

$$a(u, v) = \langle u, v \rangle$$

y

$$L(v) = \langle u^I, v \rangle,$$

el teorema de Lax-Milgram garantiza que la ecuación (2.8) tiene única solución. Lo que garantiza que el funcional  $J$  tiene un mínimo, y además único. En el próximo capítulo mostramos el enfoque de punto silla, para aproximar numéricamente  $u_a$  de (2.8).

# Capítulo 3

## Aproximación del campo ajustado

En este capítulo aplicamos la ideas de multiplicadores de Lagrange para resolver (2.8) como un problema de optimización con restricciones, el cual planteamos mediante una ecuación funcional, introduciendo un operador al cual se le puede implementar el método de gradiente conjugado que nos permite aproximar numéricamente el multiplicador  $\lambda$ , pero sobre todo permite la aproximación numérica a  $u_a$ .

### 3.1. Enfoque de punto silla para $(u, \lambda)$

Este método para resolver el problema (2.8), o equivalentemente (2.4), se basa en la metodología usual para resolver problemas de optimización sujeto a restricciones, haciendo uso del método de multiplicadores de Lagrange para optimización. El punto importante es relajar la condición de conservación de masa, introduciendo un nuevo parámetro: el multiplicador de Lagrange  $\lambda$ . Esto significa que introduciremos un nuevo espacio de funciones vectoriales, donde buscaremos la solución, el cual definimos y denotamos como

$$\mathbf{V}_N = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{div}; \Omega) \mid \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ en } \Gamma_N\}$$

Con la introducción de este nuevo espacio definimos el Lagrangiano

$$L : \mathbf{V}_N \times L_2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

por

$$L(\mathbf{v}, q) \equiv J(\mathbf{v}) + \langle q, \nabla \cdot \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (S(\mathbf{v} - u^I)) \cdot (\mathbf{v} - u^I) dx + \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} dx.$$

La primera variación de  $L$  en un punto  $(u, \lambda)$  en sus dos direcciones está dada por,

$$\begin{aligned} L^{(1)}(u, \lambda, \mathbf{v}) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{L(u + \epsilon v, \lambda) - L(u, \lambda)}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{J(u + \epsilon v) + \int_{\Omega} \lambda \nabla \cdot (u + \epsilon v) dx - J(u) - \int_{\Omega} \lambda \nabla \cdot u dx}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{J(u) + \epsilon J^{(1)}(u; v) + \frac{\epsilon^2}{2} J^{(2)}(u; v) + \int_{\Omega} \lambda \nabla \cdot u dx + \int_{\Omega} \lambda \nabla \cdot (\epsilon v) dx}{\epsilon} \right. \\ &\quad \left. + \frac{J(u) - \int_{\Omega} \lambda \nabla \cdot u dx}{\epsilon} \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon J^{(1)}(u; v) + \frac{\epsilon^2}{2} J^{(2)}(u; v) + \int_{\Omega} \lambda \nabla \cdot (\epsilon v) dx}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [J^{(1)}(u; v) + \frac{\epsilon}{2} J^{(2)}(u; v) + \int_{\Omega} \lambda \nabla \cdot v dx] \\ &= J^{(1)}(u; v) + \int_{\Omega} \lambda \nabla \cdot v dx. \\ &= \int_{\Omega} (S(u - u^I)) \cdot v dx + \int_{\Omega} \lambda \nabla \cdot v dx. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$L^{(1)}(u, \lambda, \mathbf{q}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{L(u, \lambda + \epsilon q) - L(u, \lambda)}{\epsilon}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{J(u) + \int_{\Omega} (\lambda + \epsilon q) \nabla \cdot u dx - J(u) - \int_{\Omega} \lambda \nabla \cdot u dx}{\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{J(u) + \int_{\Omega} (\lambda) \nabla \cdot u dx + \int_{\Omega} (\epsilon q) \nabla \cdot u - J(u) - \int_{\Omega} \lambda \nabla \cdot u dx}{\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{\Omega} (\epsilon q) \nabla \cdot u dx}{\epsilon} \\
&= \int_{\Omega} q \nabla \cdot u dx.
\end{aligned}$$

Un punto estacionario de  $L$  es un par  $(u, \lambda)$  que satisface

$$L^{(1)}(u, \lambda; \mathbf{v}) = 0$$

$$L^{(1)}(u, \lambda; q) = 0$$

Esto es  $(u, \lambda)$  satisface,

$$\int_{\Omega} Su \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Omega} \lambda \nabla \cdot \mathbf{v} dx = \int_{\Omega} Su^I \cdot \mathbf{v} dx \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_{\mathbf{N}} \quad (3.1)$$

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot u dx = 0 \quad \forall q \in L_2(\Omega) \quad (3.2)$$

donde  $\lambda$  no necesita satisfacer las condiciones de frontera.

**Afirmación 3.1.1.** En la solución  $(u, \lambda)$  de (3.1)-(3.2)  $u$  es el mínimo de  $J$ .

Esta afirmación se tiene debido a que los puntos estacionarios del lagrangiano  $L$  son los valores extremos de  $J$ , anteriormente se mencionó que  $J$  solamente tiene mínimo y además único, por lo que la solución  $u$  de (3.1)-(3.2) debe existir y debe ser única.

Es preciso remarcar que el mínimo  $u$  de  $J$  se encuentra en  $\mathbf{V}_{\mathbf{N}}$  donde la divergencia cero no se requiere. Dado que la condición  $\nabla \cdot u = 0$  es relajada por la introducción del multiplicador de Lagrange  $\lambda$ , el problema de minimizar  $J$ , se traduce a buscar la solución de (3.1)-(3.2). Para resolver este problema se introduce un método inspirado por Roland Glowinski el cual demostró ser

muy útil para resolver el problema de Stokes en dinámica de fluidos.

La idea es la siguiente:

Supongamos que  $(u, \lambda)$  es la solución del problema (3.1)-(3.2), y que el campo  $u$  es de la forma  $u = u^I + u_\lambda$ , donde  $u^I$  es el campo inicial y  $u_\lambda \in \mathbf{V}_N$  representa el ajuste necesario que requiere  $u^I$  para ser la mejor aproximación de la solución  $u$ . Con este supuesto, sustituyendo  $u = u^I + u_\lambda$  en (3.1) se tiene,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} S(u^I + u_\lambda) \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Omega} \lambda \nabla \cdot \mathbf{v} dx &= \int_{\Omega} S u^I \cdot \mathbf{v} dx \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_N \\ \int_{\Omega} S u^I \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Omega} S u_\lambda \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Omega} \lambda \nabla \cdot \mathbf{v} dx &= \int_{\Omega} S u^I \cdot \mathbf{v} dx \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_N \\ \int_{\Omega} S u_\lambda \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Omega} \lambda \nabla \cdot \mathbf{v} dx &= 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_N. \end{aligned}$$

De donde se concluye que el ajuste  $u_\lambda$  satisface la siguiente ecuación;

$$\int_{\Omega} S u_\lambda \cdot \mathbf{v} dx = - \int_{\Omega} \lambda \nabla \cdot \mathbf{v} dx \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_N. \quad (3.3)$$

Además  $u$  satisface (3.2), es decir

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot (u^I + u_\lambda) dx = 0 \quad \forall q \in L_2(\Omega)$$

lo que implica

$$\nabla \cdot (u^I + u_\lambda) = 0$$

de donde se obtiene

$$\nabla \cdot u^I = -\nabla \cdot u_\lambda \quad (3.4)$$

Hasta aquí aún no salimos de dificultades, ya que resolver el problema de punto silla dado por (3.1)-(3.2) se ha traducido a calcular  $u_\lambda$ , con lo cual la solución estaría dada por  $u = u^I + u_\lambda$ . Para calcular  $u_\lambda$  debemos resolver (3.3)-(3.4) para  $u_\lambda$ , lo cual a primera vista no parece tan sencillo pero se hará en la siguiente sección.

## 3.2. Gradiente conjugado para determinar $\lambda$

En la sección anterior nos encontramos frente al problema de resolver (3.3) y (3.4) para  $u_\lambda$ . Intentar resolver este problema por metodologías propias de éste tipo de problemas, parece indicarnos que esta manera de formular nuestro problema solo tiene un sentido teórico, pues resulta complicado hacer los cálculos, sin embargo observemos que el problema (3.3)-(3.4) puede formularse como una ecuación funcional. Para esto introducimos el operador lineal  $A$  de  $L_2(\Omega)$  en  $L_2(\Omega)$  definido por:

$$Aq = -\nabla \cdot u_q, \quad (3.5)$$

donde  $u_q \in \mathbf{V}_N$  es la solución de

$$\int_{\Omega} Su_q \cdot \mathbf{v} dx = - \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} dx \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_N. \quad (3.6)$$

**Nota 3.2.1.** El operador (3.5) trabaja de la siguiente manera:

Tomamos  $q \in L_2(\Omega)$  y resolvemos

$$\int_{\Omega} Su_q \cdot \mathbf{v} dx = - \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} dx \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_N$$

para  $u_q$ , y a continuación calculamos  $\nabla \cdot u_q$ , de esta manera, el operador  $A$  establece la correspondencia  $q \mapsto -\nabla \cdot u_q$ .

Así para calcular  $u_\lambda$  usando el funcional anterior, debemos encontrar  $\lambda \in L_2(\Omega)$  y resolver

$$\int_{\Omega} Su_\lambda \cdot \mathbf{v} dx = - \int_{\Omega} \lambda \nabla \cdot \mathbf{v} dx \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_N. \quad (3.7)$$

**Afirmación 3.2.2.** El operador  $A$  es autoadjunto y fuertemente elíptico, que es la generalización de los conceptos de simetría y definida positiva que se asocia a las formas bilineales.

*Demostración.*

1. Primero demostraremos que el operador es autoadjunto, es decir:

$$\langle q, Aq' \rangle = \langle Aq, q' \rangle \quad \forall q, q' \in L_2(\Omega).$$

Sean  $q$  y  $q'$  elementos arbitrarios de  $L^2(\Omega)$ ,

$$\langle q, Aq' \rangle = \int_{\Omega} q Aq' dx = \int_{\Omega} q \nabla \cdot u_{q'}.$$

La ecuación (3.6) se cumple  $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_{\mathbf{N}}$ , en particular si  $\mathbf{v} = u_{q'}$  se tiene,

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot u_{q'} = - \int_{\Omega} S u_q \cdot u_{q'} dx. \quad (3.8)$$

Análogamente se demuestra que,

$$\langle Aq, q' \rangle = - \int_{\Omega} S u_{q'} \cdot u_q dx.$$

Usando el hecho de que la transpuesta de un número real es el mismo número se tiene que

$$\int_{\Omega} S u_q \cdot u_{q'} dx = \int_{\Omega} u_q^T S u_{q'} = \int_{\Omega} (u_q^T S u_{q'})^T = \int_{\Omega} u_{q'}^T S u_q = \int_{\Omega} S u_{q'} \cdot u_q dx$$

de lo que se concluye que,

$$\langle q, Aq' \rangle = \langle Aq, q' \rangle \quad \forall q, q' \in L_2(\Omega),$$

2. Ahora se demuestra que el operador  $A$  tiene la propiedad de ser fuertemente elíptico:

$$\int_{\Omega} q Aq dx = \int_{\Omega} S u_q \cdot u_q dx > c \|u_q\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \forall q \in L_2(\Omega), \quad 0 < c < \min\{\alpha_i\}.$$

La igualdad se obtiene de la ecuación (3.8), la desigualdad se tiene por el efecto de multiplicar  $u_q$  con  $S$ .



Con la formulación de este funcional es claro que el multiplicador  $\lambda$  que buscamos satisface:

$$A\lambda = -\nabla \cdot u_\lambda,$$

donde  $u_\lambda$  representa el ajuste que necesita  $u^I$  para ser una buena aproximación de la solución que buscamos. Pero el ajuste  $u_\lambda$  satisface (3.4), ésto nos indica que para calcular  $\lambda$  debemos resolver la ecuación

$$A\lambda = \nabla \cdot u^I. \quad (3.9)$$

Observando la ecuación anterior podemos rescatar la analogía que existe entre ésta y un sistema de ecuaciones lineales. De ahí nace la idea de estudiar los métodos que se usan para resolver sistemas lineales e implementar alguno de ellos para resolver (3.9).

Una observación importante es que la mayoría de los métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales emplean las entradas de la matriz asociada al sistema, y en nuestro problema no existen elementos análogos a éstas, pues el papel de la matriz en nuestro caso, lo juega el operador  $A$  del cual solo sabemos que es autoadjunto y fuertemente elíptico. Es por ello que el método que emplearemos es gradiente conjugado, debido a que este no emplea las entradas de la matriz, solo exige que en el espacio donde se busca la solución del sistema esté definido un producto interior, lo cual satisface nuestro problema.

De esta manera, podemos aproximar la solución del problema (3.9) siguiendo la idea central del método de gradiente conjugado estudiado anteriormente, de este modo cuando trasladamos aquel algoritmo para resolver nuestro problema, obtenemos el siguiente proceso iterativo para determinar  $\lambda$ .

1. Dado  $\lambda^0 \in L_2(\Omega)$  resolvemos para  $u_0 \in V_N$

$$\int_{\Omega} S u^0 \cdot \mathbf{v} dx = \int_{\Omega} S u^I \cdot \mathbf{v} dx - \int_{\Omega} \lambda^0 \nabla \cdot \mathbf{v} dx \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_N. \quad (3.10)$$

y hacemos

$$g^0 = \nabla \cdot u^I - A\lambda^0 = \nabla \cdot u^I - (-\nabla \cdot u_0) = \nabla \cdot u^0.$$



Donde  $u^0$  es la primera aproximación de la solución  $u$ .

Así,

$$g^0 = \nabla \cdot u^0 \text{ y } d^0 = g^0.$$

2. Para calcular la aproximación  $k = 1, 2, \dots$  suponemos que conocemos,  $\lambda^k, g^k, d^k, u^k$ .

$$\alpha_k = \frac{\langle g^k, g^k \rangle}{\langle Ad^k, d^k \rangle},$$

para calcular  $Ad^k$  resolvemos

$$\int_{\Omega} S\bar{u}^k \cdot \mathbf{v} dx = - \int_{\Omega} d^k \nabla \cdot \mathbf{v} dx \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_N, \quad (3.11)$$

de esta manera

$$Ad^k = -\nabla \cdot \bar{u}^k,$$

$$\text{y } \alpha_k = \frac{\langle g^k, g^k \rangle}{\langle \nabla \cdot \bar{u}^k, d^k \rangle}.$$

3.  $\lambda^{k+1} = \lambda^k + \alpha^k d^k$ .

$$u^{k+1} = u^k + \alpha^k \bar{u}^k,$$

4.  $g^{k+1} = g^k - \alpha^k (-\nabla \cdot \bar{u}^k)$

$$= g^k + \alpha^k (\nabla \cdot \bar{u}^k).$$

5.  $\beta^{k+1} = \frac{\langle g^{k+1}, g^{k+1} \rangle}{\langle g^k, g^k \rangle}$

6.  $d^{k+1} = g^{k+1} + \beta^{k+1} d^k$ .

Note que en el paso 3 se actualizó  $u$  simultáneamente con la actualización de  $\lambda$ . Esto se hace porque de la ecuación (3.7) se tiene que para cada  $\lambda^k, u^k$  debe satisfacer

$$\int_{\Omega} Su^k \cdot \mathbf{v} dx = - \int_{\Omega} \lambda^k \nabla \cdot \mathbf{v} dx. \quad (3.12)$$

Similarmente para  $\lambda^{k+1}$ ,  $u^{k+1}$  debe cumplir

$$\int_{\Omega} S u^{k+1} \cdot \mathbf{v} dx = - \int_{\Omega} \lambda^{k+1} \nabla \cdot \mathbf{v} dx. \quad (3.13)$$

Restando (3.12) de (3.13) se obtiene

$$\int_{\Omega} S(u^{k+1} - u^k) \cdot \mathbf{v} dx = - \int_{\Omega} (\lambda^{k+1} - \lambda^k) \nabla \cdot \mathbf{v} dx.$$

Como  $\lambda^{k+1} - \lambda^k = \alpha^k d^k$ , de la ecuación anterior se obtiene

$$\int_{\Omega} S(u^{k+1} - u^k) \cdot \mathbf{v} dx = - \int_{\Omega} (\alpha^k d^k) \nabla \cdot \mathbf{v} dx. \quad (3.14)$$

Por lo tanto, de (3.11) se concluye que

$$\int_{\Omega} \alpha^k S \underline{u}^k \cdot \mathbf{v} dx = - \int_{\Omega} \alpha^k d^k \nabla \cdot \mathbf{v} dx \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_N. \quad (3.15)$$

Comparando (3.14) con (3.15) se deduce la relación de actualización

$$u^{k+1} = u^k + \alpha^k \underline{u}^k. \quad (3.16)$$

En el algoritmo anterior  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota el producto interior usual en  $L_2(\Omega)$ . Una gran ventaja que tiene este algoritmo, es que no se pide ninguna condición de frontera para el multiplicador  $\lambda$ , pero sí para las funciones del tipo velocidad, contrariamente a los métodos que se han desarrollado en trabajos anteriores referentes a este problema. Este hecho tiene un efecto muy importante en el cálculo numérico.



# Capítulo 4

## Cálculos y ejemplos

Dentro del algoritmo de gradiente conjugado, de acuerdo a la ecuación (3.10), el problema interesante a resolver es el siguiente: dado  $\lambda \in L_2(\Omega)$  se resuelve para  $\mathbf{u}^\lambda \in \mathbf{V}_N$  :

$$\int_{\Omega} S\mathbf{u}^\lambda \cdot \mathbf{v}d\mathbf{x} = \int_{\Omega} S\mathbf{u}^I \cdot \mathbf{v}d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \lambda \nabla \cdot \mathbf{v}d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_N. \quad (4.1)$$

posteriormente surge el problema (3.11) el cual se resuelve fácilmente si sabemos resolver (4.1). Para ello es necesario discretizar el problema sustituyendo los espacios abstractos por los espacios de elemento finito  $V_h$  y  $W_h$  contenidos en  $L_2(\Omega)$  y  $\mathbf{V}_N$  respectivamente en los cuales se resuelve (4.1), dicha ecuación es de carácter vectorial siendo los subespacios  $V_h$  y  $W_h$  de dimensión  $N$ , el problema deriva en un sistema de  $N^2 \times N^2$ . Alternativamente cuando se hace la formulación por componentes y suponiendo que  $S$  es diagonal, se obtienen dos sistemas de  $N \times N$  desacoplados que se resuelven por separado, para ver esto, de las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$S\mathbf{u} - \nabla\lambda = S\mathbf{u}^I \quad (4.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.3)$$

se obtienen:

$$S_{11}u_1 - \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} = S_{11}u_1^I \quad (4.4)$$

con

$$S_{22}u_2 - \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} = S_{22}u_2^I \quad (4.5)$$

y teniendo en cuenta que:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^I + \mathbf{u}_\lambda \quad (4.6)$$

$$S(\mathbf{u}^I + \mathbf{u}_\lambda) - \nabla \lambda = S\mathbf{u}^I \quad (4.7)$$

lo cual implica:

$$S\mathbf{u}_\lambda = \nabla \lambda \quad (4.8)$$

cuya formulación variacional es:

$$\int_{\Omega} S\mathbf{u}_\lambda \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega} \nabla \lambda \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_N. \quad (4.9)$$

por consiguiente las ecuaciones (4.4) y (4.5) tienen en consecuencia la forma variacional:

$$\int_{\Omega} S_{11}u_1v - \int_{\Omega} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1}v = \int_{\Omega} S_{11}u_1^Iv \quad \forall v \in \mathbf{L}_2 \quad (4.10)$$

$$\int_{\Omega} S_{22}u_2v - \int_{\Omega} \frac{\partial \lambda}{\partial x_2}v = \int_{\Omega} S_{22}u_2^Iv \quad \forall v \in \mathbf{L}_2 \quad (4.11)$$

a fin de resolver estos problemas se considera discretizado el dominio  $\Omega$  en el cual se tiene cierto número de nodos de velocidad (que denotaremos por  $n_{vel}$ ), de esta forma y sólo para no depender de los índices escribimos:

$$\int_{\Omega} S_{kk} u_k v_i - \int_{\Omega} \frac{\partial \lambda}{\partial x_k} v_i = \int_{\Omega} S_{kk} u_k^I v_i \quad \forall v \in \mathbf{L}_2 \quad i = 1 \dots \text{nnvel}, \quad k = 1, 2 \quad (4.12)$$

aplicando el teorema de la divergencia al segundo término de lado izquierdo de (4.12) se obtiene:

$$\int_{\Omega} S_{kk} u_k v_i + \int_{\Omega} \lambda \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \int_{\partial \Omega} \lambda v_i = \int_{\Omega} S_{kk} u_k^I v_i \quad i = 1 \dots \text{nnvel}, \quad k = 1, 2 \quad (4.13)$$

recordando que  $\partial \Omega = \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , si  $\lambda = 0$  en  $\Gamma_1$  y  $v_i = 0$  en  $\Gamma_2$  se cumple que:

$$\int_{\Omega} S_{kk} u_k v_i = - \int_{\Omega} \lambda \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \int_{\Omega} S_{kk} u_k^I v_i \quad i = 1 \dots \text{nnvel}, \quad k = 1, 2 \quad (4.14)$$

en ésta última relación el algoritmo de gradiente conjugado divide el problema en partes que tienen a  $\lambda$  como dato y en el lado izquierdo expresando  $u_k$  como combinación lineal de las  $v_{j's}$ . el lado izquierdo de la última igualdad puede conocerse de acuerdo a lo siguiente:

$$\int_{\Omega} S_{kk} u_k v_i = \sum_{e=1}^{ne(i)} \int_{T_e} S_{kk} u_k v_i = \sum_{e=1}^{ne(i)} [S_{kk} u_k v_i]_i^{\mu} \cdot (\text{área de } T_e) \quad (4.15)$$

donde  $g(e, \mu) = i$ , además el lado de la derecha de la ecuación anterior es igual a:

$$\sum_{e=1}^{ne(i)} \frac{|T_e|}{2} S_{kk} u_k v_i = \sum_{e=1}^{ne(i)} \frac{|T_e|}{2} S_{kk} u_k(n_i) = S_{kk} u_k(n_i) \sum_{e=1}^{ne(i)} \frac{|T_e|}{2} \quad (4.16)$$

donde  $|T_e|$  denota el determinante de la transformación afín que manda el triángulo  $T_e$  en el elemento maestro  $K_e$  y que es el triángulo con vértices  $(0,0)$ ,  $(1,0)$  y  $(0,1)$ . fijándonos ahora en el lado derecho de la ecuación (4.14) el primer término requiere de la solución de integrales del tipo:

$$\int_{\Omega} \lambda \nabla v_i d\mathbf{x}, \quad i = 1 \dots \text{nnvel}, \quad (4.17)$$

para ello de acuerdo a [GLOW] es necesario que  $\lambda$  esté definido en una malla el doble de gruesa que la malla de velocidad a fin de garantizar la estabilidad computacional del problema. La estrategia aquí es calcular triángulo por triángulo en la malla correspondiente a  $\lambda$  la integral anterior, y entonces se tiene para un triángulo dado  $T_e$ :

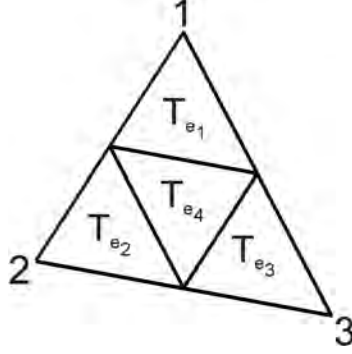


Figura 4.1: Triángulo de presión  $T_e$  y los de velocidad asociados.

$$\int_{\Omega} \lambda \nabla v_i d\mathbf{x} = \sum_e \int_{T_e} \lambda \nabla v_i d\mathbf{x} = \sum_e \sum_{k=1}^4 \int_{T_{e_k}} \lambda \nabla v_i d\mathbf{x} \quad (4.18)$$

donde  $T_e$ =elemento o triángulo correspondiente a la malla para  $\lambda$  y  $(T_{e_k})_{k=1}^4$  son los subelementos de  $T_e$  en la malla de velocidad. La integral sobre  $T_{e_k}$  es distinta de cero cuando  $i$  es un nodo de  $T_{e_k}$ . Si  $i = g(e_k, \rho)$  para  $1 \leq \rho \leq 3$  entonces:

$$\int_{\Omega} \lambda \nabla v_i d\mathbf{x} = \sum_e \sum_{k=1}^4 \int_T \lambda(\xi) (\nabla v_\rho)^T J_{e_k}^{-1} |J_{e_k}| d\xi \quad (4.19)$$

aquí la integral en el lado derecho se calcula sobre el triángulo canónico  $T$  y  $J_{e_k}$  es la transformación afín de  $T_{e_k}$  sobre  $T$  (fig. 1.2) por consiguiente:

$$\sum_e \sum_{k=1}^4 \int_T \lambda(\xi) (\nabla v_\rho)^T J_{e_k}^{-1} |J_{e_k}| d\xi = \sum_e \sum_{k=1}^4 (\nabla v_\rho)^T J_{e_k}^{-1} |J_{e_k}| \int_T \lambda(\xi) d\xi \quad (4.20)$$

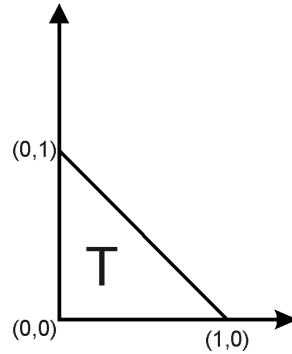


Figura 4.2: Triángulo canónico

de acuerdo a la regla del trapecio aplicada a la integral del lado derecho de la última ecuación se tiene que:

$$\int_{\Omega} \lambda \nabla v_i dx = \sum_e \sum_{k=1}^4 (\nabla v_{\rho})^T J_{e_k}^{-1} |J_{e_k}| \frac{|T|}{6} (\lambda_{g(e_k,1)} + \lambda_{g(e_k,2)} + \lambda_{g(e_k,3)}) \quad (4.21)$$

El segundo término de (4.14) se resuelve como se hizo en el capítulo 1 para  $\int_{\omega} f v_i dx$ .

## 4.1. Ejemplos de Aplicación

### 4.1.1. El campo $\mathbf{u} = (x, -z)$

Se tomó  $\mathbf{u} = (x, -z)$  como campo de prueba y se ejecutó el programa tomando  $\mathbf{u}^I = (x, 0)$ , con  $\Omega = (1, 2) \times (0, 1)$ . La figura (4.3) muestra la malla para  $\Omega$ , en rojo la malla gruesa y en azul la malla fina. Se considera  $S_{11} = 1$ ,  $S_{22} = 1$ ,  $S_{12} = S_{21} = 0$ . En la figura (4.4) se muestra la gráfica de  $\lambda$  y en la figura (4.5) se muestra la superposición del campo exacto con el campo ajustado (el campo inicial se obtuvo del exacto haciendo cero la segunda componente). La solución aproximada para la velocidad se obtuvo con  $h = 1/40$ , es decir, con una malla de  $40 \times 40$ . Para este ejemplo se usó  $\epsilon = 1\text{E-}12$  para checar convergencia en gradiente conjugado. Para satisfacer ese criterio se necesitaron 1096 iteraciones. Con esto se obtuvo un error relativo de  $1.53774920\text{E-}7$  y una divergencia en los nodos interiores de  $1.84414244\text{E-}8$ .



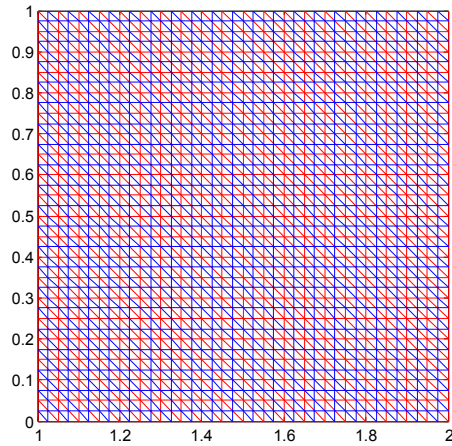


Figura 4.3: Mallado para la región  $\Omega$  del ejemplo  $\mathbf{u} = (x, -z)$ .

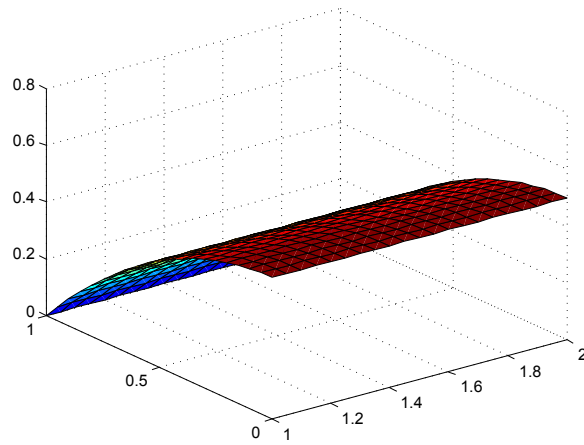


Figura 4.4: Multiplicador aproximado para el ejemplo  $\mathbf{u} = (x, -z)$ .

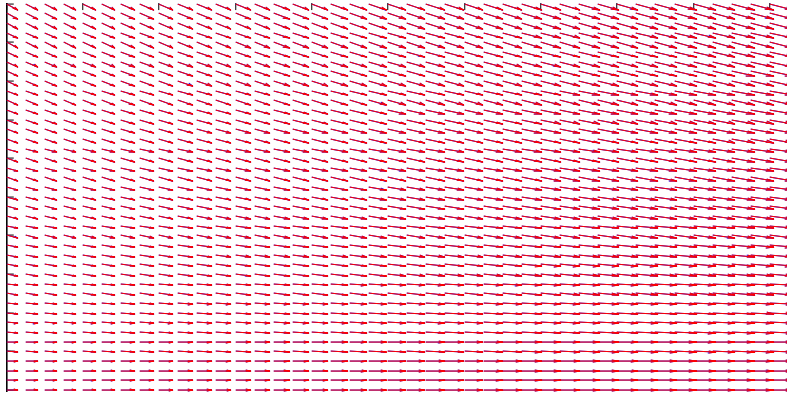


Figura 4.5: Campos exacto (rojo) y aproximado (azul) para el ejemplo  $\mathbf{u} = (x, -z)$ .

#### 4.1.2. Canal con paredes curvas

Se tomó como campo "exacto"  $\mathbf{u}$  de prueba, uno que se obtuvo resolviendo las ecuaciones de Saint-Venant con el software GUAD-2D en el dominio  $(0,20) \times (0,10)$  que en su parte media superior e inferior tiene una curvatura que lo estrecha. A este campo se le fijó en cero su segunda componente para obtener el campo  $\mathbf{u}^I$ , al que se le aplica la metodología descrita para ajustarlo a uno que tenga divergencia cero (se espera recuperar el campo "exacto"  $\mathbf{u}$ ). Se considera  $S_{11} = 1$ ,  $S_{22} = 1$ ,  $S_{12} = S_{21} = 0$ . En este caso se usó  $\epsilon = 1\text{E-}12$  para checar convergencia en gradiente conjugado y para satisfacer ese criterio se necesitaron 357 iteraciones. Con esto se obtuvo un error relativo de  $1.39943715\text{E-}2$  y una divergencia en los nodos interiores de  $-2.55964757\text{E-}5$ , en las figuras (4.6), (4.7) y (4.8) se muestran la malla de la región  $\Omega$  para el campo anteriormente mencionado (de nuevo en rojo malla gruesa y en azul malla fina, el multiplicador  $\lambda$  aproximado y la superposición del campo exacto con el aproximado. La solución aproximada para la velocidad se obtuvo con  $h = (2/7)m$  en la parte uniforme, es decir, con una malla de  $84 \times 42$  pero no uniforme en la parte central del dominio.

Como se puede notar, los mayores errores se dan donde el flujo es más complicado, es decir en el ejemplo 2 en la parte donde se estrecha el canal.

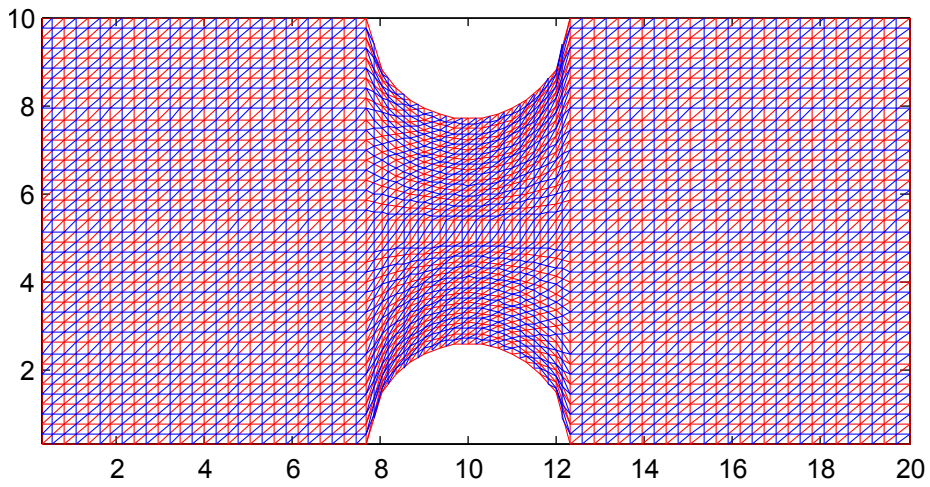


Figura 4.6: Mallado para la región  $\Omega$  del ejemplo 2 para el canal curvo.

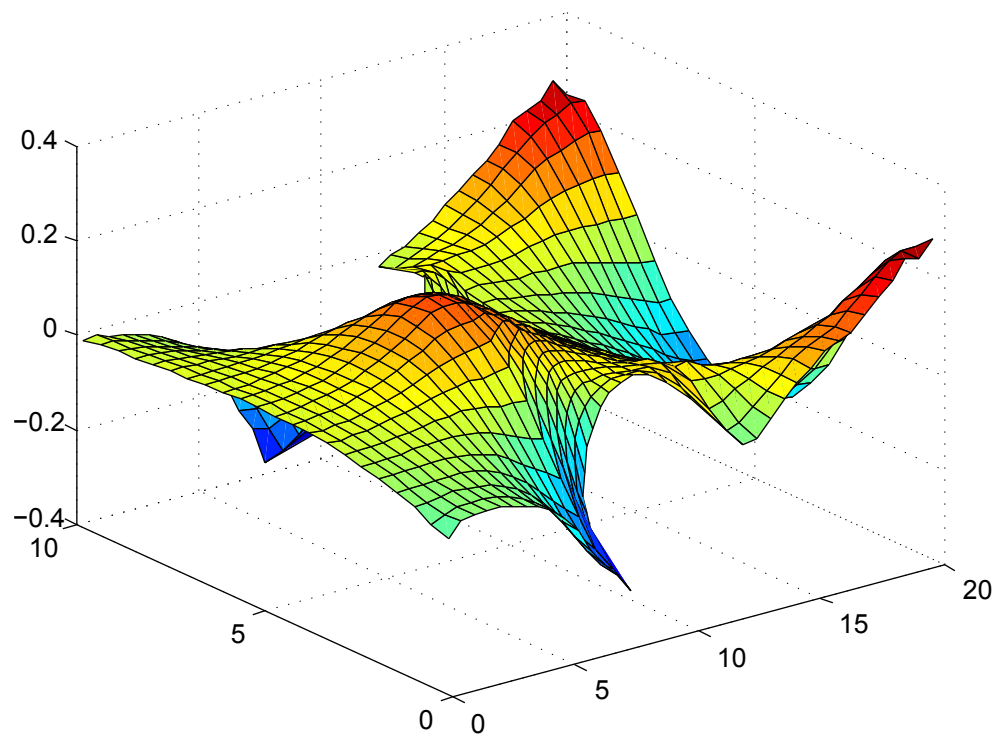


Figura 4.7: Multiplicador aproximado para el ejemplo del canal curvo.

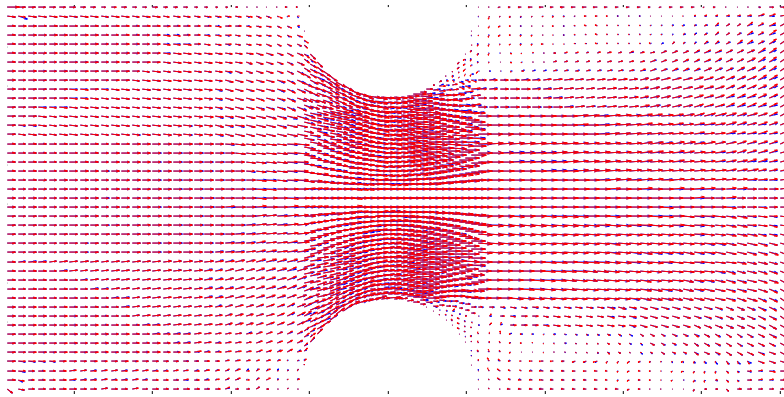


Figura 4.8: Campos exacto (rojo) y aproximado (azul) para el ejemplo del canal curvo.

## 4.2. Conclusiones

Con la metodología de punto silla y dando condiciones de frontera exactas para el campo, se ha recuperado bien la segunda componente, a partir de la primera, de dos campos de velocidad, uno asociado con viento y otro asociado con aguas someras, pero se continúa trabajando en la factibilidad del enfoque de punto silla sin tener necesidad de dar condiciones de frontera exactas. Por otro lado, aunque en el caso de viento es natural hacer esta recuperación de la segunda componente a partir de la primera, en flujos de agua no tiene mucho sentido, por lo cual es necesario experimentar con campos de inicio con otras características, propias de mediciones de flujos de aguas someras. Otra posibilidad es considerar preconditionamiento para acelerar la convergencia de gradiente conjugado.



# Bibliografía

- [SY] Sasaki Y. An objective analysis based on the variational method, *JournalMet. Soc. Japan* 36: 77-78.
- [JHL] Juárez Héctor, L., Sandoval Maria Luisa, López Jorge, Reséndiz Rafael *Mass-Consistent Wind Field Models: Numerical Techniques by L2-Projection Methods*, 2011. Aceptado para publicación.
- [AI] Arieh I. 2009. *A first course in the numerical analysis of differential equations*. Cambridge university press.
- [CVS] Cruz, V. S. Tesis de Licenciatura: *Generación de velocidades iniciales del flujo de una sección del río Grijalva*. UJAT 2011.
- [FJN] Flores C., Juárez H., Núñez M. and Sandoval M. L. *Algorithms for Vector Field Generation in Mass Consistent Model*. Wiley Inter Science, DOI 10.1002/num. 20458.
- [JHL1] Juárez H., Sandoval M. L. and López J. 2010. *Memorias de: First Symposium on inverse problems and its Applications. Chapter (8) Reconstruction of Velocity Wind Fields From Horizontal Data by Projection Methods*. Publicaciones UAM-Iztapalapa. Ixtapa.
- [JSL] Juárez H., Sandoval M. L., López J. and Reséndiz R. 2011. *Mass-Consistent Wind Field Models: Numerical Techniques by L2-Projection Methods*. Aceptado para publicación.
- [KE] Kreyszig E. 1978. *Introductory functional analysis with applications*, John Wiley and Sons. Canadá.
- [SY] Sasaki Y. *An objective analysis based on the variational method*, *Journal Met. Soc. Japan* 36.

- 
- [ZST] Zhao, D. H., Shen, H. W., Tabios, G. Q., Lai, J. S. and Tan, W. Y. 1994 *Finite volume two-dimensional unsteady flow model for river basins*, J. of Hydraulic Engineering, 120(7).
- [GLOW] R. Glowinsky. Ensuring Well- Posedness by Analogy; Stokes Problem and Boundary Control for the Wave Equation. JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS 103, 18 221 (1992).
- [LCJ] J. López, D. Chablé, H. Juárez. Generación de campos de viento por métodos variacionales. Revista de ciencias básicas UJAT, Vol 8, 16 28.
- [JL] L.H. Juarez, D.A. León. Notas de Álgebra lineal numérica, optimización y mínimos cuadrados del 4º coloquio del depto. de matemáticas UAM- Iztapalapa. Enero 2011 p58.
- [FJNM] C. Flores, H. Juárez, M.A. Nuñez, M.L. Sandoval. Algorithms for vector field generation in mass consistent models. Wiley InterScience. DOI 10.1002/num. 20458.
- [LRJA] J. López, J. Romero, H. Juárez, J. Alavez. Ajuste de campos de velocidad en aguas someras. Un enfoque elíptico. Memorias de la semana de la investigación y video científico 2001. pp. 100-105.
- [Y] Y. Rincón . Mallado triangular y refinado de dominios en 2D. Tesis de maestría. En proceso.
- [BRE] H. Bresiz, *Análisis funcional. Teoría y aplicaciones*, Alianza Editorial, 1978.