Muestre la formula de reducción

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^m} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{x}{(2m-2)(a^2+x^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2m-2}\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{m-1}} \right)$$

Integrando por partes

$$u = \frac{1}{(a^2+x^2)^m}, dv = dx$$

$$du = \frac{-2mx}{(a^2+x^2)^{m+1}}, v = x$$

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^m} = \frac{x}{(a^2+x^2)^m} + 2m\int \frac{x^2 dx}{(a^2+x^2)^{m+1}} = \frac{x}{(a^2+x^2)^m} + 2m\int \frac{(\pm a^2+x^2)dx}{(a^2+x^2)^{m+1}}$$

$$= \frac{x}{(a^2+x^2)^m} + 2m\int \frac{a^2+x^2}{(a^2+x^2)^{m+1}}dx - 2m\int \frac{a^2 dx}{(a^2+x^2)^{m+1}}$$

$$= \frac{x}{(a^2+x^2)^m} + 2m\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^m} - 2m\int \frac{a^2 dx}{(a^2+x^2)^{m+1}}$$

Luego

$$(1-2m)\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^m} = \frac{x}{(a^2+x^2)^m} - 2m\int \frac{a^2 dx}{(a^2+x^2)^{m+1}}$$

Despejando

$$2m\int \frac{a^2 dx}{(a^2+x^2)^{m+1}} = \frac{x}{(a^2+x^2)^m} + (2m-1)\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^m}$$

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{m+1}} = \frac{1}{2ma^2}\left(\frac{x}{(a^2+x^2)^m} + (2m-1)\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^m} \right)$$

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{m+1}} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{x}{2m(a^2+x^2)^m} + \frac{2m-1}{2m}\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^m} \right)$$

Esta fórmula se puede escribir cambiando m+1por m, o sea, m por m-1, como

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^m} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{x}{(2m-2)(a^2+x^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2m-2}\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{m-1}} \right)$$