Capítulo 29

Integración por descomposición en fracciones simples

UN POLINOMIO EN x es una función de la forma $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, en donde los coeficientes son constantes, $a_0 \neq 0$ y n un número entero y positivo cualquiera, incluido el cero.

Si dos polinomios del mismo grado toman iguales valores numéricos para todos los valores de la variable, los coeficientes de los términos de igual grado de ésta, en ambos polinomios, son iguales.

Todo polinomio de coeficientes reales se puede expresar (al menos teóricamente) como producto de factores reales lineales, de la forma $ax + b$, y de factores cuadráticos reales irreducibles, de la forma $ax^2 + bx + c$.

UNA FUNCION $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ en la que $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios recibe el nombre de *fracción racional.*

Si el grado de $f(x)$ es menor que el de $g(x)$, $F(x)$ recibe el nombre de función *propia*; en caso contrario, $F(x)$ se denomina *impropia.*

Toda fracción racional impropia se puede expresar (al menos teóricamente) como suma de un polinomio y una fracción propia. Por ejemplo, $\dfrac{x^3}{x^2+1} = x - \dfrac{x}{x^2+1}$.

Toda fracción racional propia se puede expresar (al menos teóricamente) como suma de *fracciones simples* cuyos denominadores son de la forma $(ax + b)^n$ y $(ax^2 + bx + c)^n$, siendo n un número entero y positivo. Atendiendo a la naturaleza de los factores del denominador, se pueden considerar cuatro casos.

CASO I. FACTORES LINEALES DISTINTOS

A cada factor lineal, $ax + b$, del denominador de una fracción racional propia, le corresponde una fracción de la forma $\dfrac{A}{ax+b}$, siendo A una constante a determinar.

(Ver Problemas 1-2.)

CASO II. FACTORES LINEALES IGUALES

A cada factor lineal, $ax + b$, que figure n veces en el denominador de una fracción racional propia, le corresponde una suma de n fracciones de la forma

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

siendo los numeradores constantes a determinar.

(Ver Problemas 3-4.)

CASO III. FACTORES CUADRATICOS DISTINTOS

A cada factor cuadrático reducible, $ax^2 + bx + c$, que figure en el denominador de una fracción racional propia, le corresponde una fracción de la forma $\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$, siendo A y B constantes a determinar.

(Ver Problemas 5-6.)

CASO IV. FACTORES CUADRATICOS IGUALES

A cada factor cuadrático irreducible, $ax^2 + bx + c$, que se repita n veces en el denominador de una fracción racional propia, le corresponde una suma de n fracciones de la forma

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

siendo los valores de A y B constantes a determinar.

(Ver Problemas 7-8.)

Problemas resueltos

1. Hallar $\int \frac{dx}{x^2 - 4}$.

(*a*) Descomposición del denominador en factores: $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$.

Por tanto $\frac{1}{x^2 - 4} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2}$; quitando denominadores

(*1*) $1 = A(x + 2) + B(x - 2)$ o bien (*2*) $1 = (A + B)x + (2A - 2B)$

(*b*) Cálculo de las constantes.

Método general. Se identifican los coeficientes de igual potencia de x en (2) y se resuelve el sistema de ecuaciones obtenido para determinar las constantes. Esto es, $A + B = 0$ y $2A - 2B = 1$; $A = \frac{1}{4}$ y $B = -\frac{1}{4}$.

Método abreviado. Se sustituyen en (1) los valores de x que anulen los denominadores de las fracciones. Es decir, para $x = 2$ y $x = -2$, obtenemos $1 = 4A$ y $1 = -4B$, de donde, $A = \frac{1}{4}$ y $B = -\frac{1}{4}$, como antes.

(*c*) Hemos obtenido $\frac{1}{x^2 - 4} = \frac{\frac{1}{4}}{x - 2} - \frac{\frac{1}{4}}{x + 2}$ con lo cual

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x - 2} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x + 2} = \frac{1}{4}\ln|x - 2| - \frac{1}{4}\ln|x + 2| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x - 2}{x + 2}\right| + C$$

2. Calcular $\int \frac{(x + 1)\,dx}{x^3 + x^2 - 6x}$.

(*a*) $x^3 + x^2 - 6x = x(x - 2)(x + 3)$. Por tanto $\frac{x + 1}{x^3 + x^2 - 6x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x + 3}$ y

(*1*) $x + 1 = A(x - 2)(x + 3) + Bx(x + 3) + Cx(x - 2)$ o

(*2*) $x + 1 = (A + B + C)x^2 + (A + 3B - 2C)x - 6A$

(*b*) *Método general.* Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$A + B + C = 0, \quad A + 3B - 2C = 1, \quad \text{y} \quad -6A = 1$$

obtenemos $A = -1/6$, $B = 3/10$, y $C = -2/15$.

Método abreviado. Sustituyendo en (1) los valores $x = 0$, $x = 2$, y $x = -3$ obtenemos $1 = -6A$, o sea, $A = -1/6$, $3 = 10B$ ó $B = 3/10$, y $-2 = 15C$ ó $C = -2/15$.

(*c*)
$$\int \frac{(x + 1)\,dx}{x^3 + x^2 - 6x} = -\frac{1}{6}\int \frac{dx}{x} + \frac{3}{10}\int \frac{dx}{x - 2} - \frac{2}{15}\int \frac{dx}{x + 3}$$
$$= -\frac{1}{6}\ln|x| + \frac{3}{10}\ln|x - 2| - \frac{2}{15}\ln|x + 3| + C = \ln\frac{|x - 2|^{3/10}}{|x|^{1/6}\,|x + 3|^{2/15}} + C$$

3. Calcular $\int \frac{(3x + 5)\,dx}{x^3 - x^2 - x + 1}$.

$x^3 - x^2 - x + 1 = (x + 1)(x - 1)^2$. Tendremos $\frac{3x + 5}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{(x - 1)^2}$ y

$$3x + 5 = A(x - 1)^2 + B(x + 1)(x - 1) + C(x + 1)$$

Para $x = -1$, $2 = 4A$ y $A = \frac{1}{2}$. Para $x = 1$, $8 = 2C$ y $C = 4$. Para determinar las demás constantes, se sustituye otro valor de x, por ejemplo, $x = 0$; para $x = 0$, $5 = A - B + C$ y $B = -\frac{1}{2}$. Por tanto,

$$\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1} + 4\int\frac{dx}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{4}{x-1} + C = -\frac{4}{x-1} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C$$

4. Calcular $\displaystyle\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}\,dx$.

El integrando es una fracción impropia. Dividiendo,

$$\frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2} = x - \frac{x+1}{x^3-x^2} = x - \frac{x+1}{x^2(x-1)}$$

Descomponiendo $\dfrac{x+1}{x^2(x-1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x-1}$. Tendremos,

$$x + 1 = Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2$$

Para $x = 0$, $1 = -B$ y $B = -1$. Para $x = 1$, $2 = C$. Para $x = 2$, $3 = 2A + B + 4C$ y $A = -2$. Por tanto,

$$\int\frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}\,dx = \int x\,dx + 2\int\frac{dx}{x} + \int\frac{dx}{x^2} - 2\int\frac{dx}{x-1}$$
$$= \frac{1}{2}x^2 + 2\ln|x| - \frac{1}{x} - 2\ln|x-1| + C = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} + 2\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| + C$$

5. Calcular $\displaystyle\int\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}\,dx$.

$x^4 + 3x^2 + 2 = (x^2+1)(x^2+2)$. Con lo que $\dfrac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2} = \dfrac{Ax+B}{x^2+1} + \dfrac{Cx+D}{x^2+2}$. De donde

$$x^3 + x^2 + x + 2 = (Ax+B)(x^2+2) + (Cx+D)(x^2+1)$$
$$= (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + (2A+C)x + (2B+D)$$

Luego $A + C = 1$, $B + D = 1$, $2A + C = 1$, y $2B + D = 2$. Resolviendo el sistema, $A = 0$, $B = 1$, $C = 1$, $D = 0$. Es decir,

$$\int\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}\,dx = \int\frac{dx}{x^2+1} + \int\frac{x\,dx}{x^2+2} = \text{arc tag}\,x + \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + C$$

6. Resolver la ecuación $\displaystyle\int\frac{x^2\,dx}{a^4-x^4} = \int k\,dt$ que se presenta en química física.

Tendremos $\dfrac{x^2}{a^4-x^4} = \dfrac{A}{a-x} + \dfrac{B}{a+x} + \dfrac{Cx+D}{a^2+x^2}$. Por tanto,

$$x^2 = A(a+x)(a^2+x^2) + B(a-x)(a^2+x^2) + (Cx+D)(a-x)(a+x)$$

Para $x = a$, $a^2 = 4Aa^3$ y $A = 1/4a$. Para $x = -a$, $a^2 = 4Ba^3$ y $B = 1/4a$. Para $x = 0$, $0 = Aa^3 + Ba^3 + Da^2 = a^2/2 + Da^2$ y $D = -1/2$. Para $x = 2a$, $4a^2 = 15Aa^3 - 5Ba^3 - 6Ca^3 - 3Da^2$ y $C = 0$. Así, pues,

$$\int\frac{x^2\,dx}{a^4-x^4} = \frac{1}{4a}\int\frac{dx}{a-x} + \frac{1}{4a}\int\frac{dx}{a+x} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{a^2+x^2}$$
$$= -\frac{1}{4a}\ln|a-x| + \frac{1}{4a}\ln|a+x| - \frac{1}{2a}\,\text{arc tag}\,\frac{x}{a} + C$$

y

$$\int k\,dt = kt = \frac{1}{4a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| - \frac{1}{2a}\,\text{arc tag}\,\frac{x}{a} + C$$

7. Calcular $\displaystyle\int\frac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4}{(x^2+2)^3}\,dx$.

Tendremos $\dfrac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4}{(x^2+2)^3} = \dfrac{Ax+B}{x^2+2} + \dfrac{Cx+D}{(x^2+2)^2} + \dfrac{Ex+F}{(x^2+2)^3}$. De donde

$$x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4 = (Ax+B)(x^2+2)^2 + (Cx+D)(x^2+2) + Ex + F$$
$$= Ax^5 + Bx^4 + (4A+C)x^3 + (4B+D)x^2$$
$$+ (4A+2C+E)x + (4B+2D+F)$$

se obtiene $A = 1$, $B = -1$, $C = 0$, $D = 0$, $E = 4$, $F = 0$. Así, pues, la integral dada es igual a

$$\int \frac{x-1}{x^2+2}\,dx + 4\int \frac{x\,dx}{(x^2+2)^3} = \frac{1}{2}\ln(x^2+2) - \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arc\,tag}\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{(x^2+2)^2} + C$$

8. Calcular $\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}\,dx$.

Tendremos $\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$. Por tanto

$$2x^2+3 = (Ax+B)(x^2+1) + Cx + D = Ax^3 + Bx^2 + (A+C)x + (B+D)$$

de donde $A = 0$, $B = 2$, $A + C = 0$, $B + D = 3$. Por tanto $A = 0$, $B = 2$, $C = 0$, $D = 1$ y

$$\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{2\,dx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

Para la segunda integral del segundo miembro, hacemos $x = \operatorname{tag} z$. Con lo cual

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{\sec^2 z\,dz}{\sec^4 z} = \int \cos^2 z\,dz = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}\operatorname{sen}2z + C$$

y $$\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}\,dx = 2\operatorname{arc\,tag} x + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tag} x + \frac{\frac{1}{2}x}{x^2+1} + C = \frac{5}{2}\operatorname{arc\,tag} x + \frac{\frac{1}{2}x}{x^2+1} + C$$

Problemas propuestos

9. $\int \frac{dx}{x^2-9} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C$

10. $\int \frac{dx}{x^2+7x+6} = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x+1}{x+6}\right| + C$

11. $\int \frac{x\,dx}{x^2-3x-4} = \frac{1}{5}\ln|(x+1)(x-4)^4| + C$

12. $\int \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8}\,dx = x + \ln|(x+2)(x-4)^4| + C$

13. $\int \frac{x^2-3x-1}{x^3+x^2-2x}\,dx = \ln\left|\frac{x^{1/2}(x+2)^{3/2}}{x-1}\right| + C$

14. $\int \frac{x\,dx}{(x-2)^2} = \ln|x-2| - \frac{2}{x-2} + C$

15. $\int \frac{x^4}{(1-x)^3}\,dx = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - \ln(1-x)^6 - \frac{4}{1-x} + \frac{1}{2(1-x)^2} + C$

16. $\int \frac{dx}{x^3+x} = \ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| + C$

17. $\int \frac{x^3+x^2+x+3}{(x^2+1)(x^2+3)}\,dx = \ln\sqrt{x^2+3} + \operatorname{arc\,tag} x + C$

18. $\int \frac{x^4-2x^3+3x^2-x+3}{x^3-2x^2+3x}\,dx = \frac{1}{2}x^2 + \ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2-2x+3}}\right| + C$

19. $\int \frac{2x^3\,dx}{(x^2+1)^2} = \ln(x^2+1) + \frac{1}{x^2+1} + C$

20. $\int \frac{2x^3+x^2+4}{(x^2+4)^2}\,dx = \ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tag}\frac{1}{2}x + \frac{4}{x^2+4} + C$

21. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+1)^2}\,dx = \ln\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tag} x - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}\right) + C$

22. $\int \frac{x^4+8x^3-x^2+2x+1}{(x^2+x)(x^3+1)}\,dx = \ln\left|\frac{x^3-x^2+x}{(x+1)^2}\right| - \frac{3}{x+1} + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tag}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$

23. $\int \frac{x^3+x^2-5x+15}{(x^2+5)(x^2+2x+3)}\,dx = \ln\sqrt{x^2+2x+3} + \frac{5}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tag}\frac{x+1}{\sqrt{2}} - \sqrt{5}\operatorname{arc\,tag}\frac{x}{\sqrt{5}} + C$

24. $\int \frac{x^6+7x^5+15x^4+32x^3+23x^2+25x-3}{(x^2+x+2)^2(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{x^2+x+2} - \frac{3}{x^2+1} + \ln\frac{x^2+1}{x^2+x+2} + C$

25. $\int \frac{dx}{e^{2x}-3e^x} = \frac{1}{3e^x} + \frac{1}{9}\ln\left|\frac{e^x-3}{e^x}\right| + C$ (Hacer $e^x = u$.)

26. $\int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{\cos x\,(1+\cos^2 x)} = \ln\left|\frac{\sqrt{1+\cos^2 x}}{\cos x}\right| + C$ (Hacer $\cos x = u$.)

27. $\int \frac{(2+\operatorname{tag}^2\theta)\sec^2\theta\,d\theta}{1+\operatorname{tag}^3\theta} = \ln|1+\operatorname{tag}\theta| + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tag}\frac{2\operatorname{tag}\theta-1}{\sqrt{3}} + C$