Capítulo 26

Integración por partes

INTEGRACION POR PARTES. Sean u y v funciones derivables de x. En estas condiciones,

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$
$$u\,dv = d(uv) - v\,du$$

(i) $$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Para aplicar (i) en la práctica, se separa el integrando en dos partes; una de ellas se iguala a u y la otra, junto con dx, a dv. (Por esta razón, este método se denomina *integración por partes.*) Es conveniente tener en cuenta los dos criterios siguientes:

(*a*) La parte que se iguala a dv debe ser fácilmente integrable.

(*b*) $\int v\,du$ no debe ser más complicada que $\int u\,dv$.

Ejemplo 1: Calcular $\int x^3 e^{x^2}\,dx$.

Hacemos $u = x^2$ y $dv = e^{x^2} x\,dx$; de donde $du = 2x\,dx$ y $v = \frac{1}{2}e^{x^2}$. Aplicando la fórmula

$$\int x^3 e^{x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \int x\,e^{x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \tfrac{1}{2}e^{x^2} + C$$

Ejemplo 2: Calcular $\int \ln(x^2+2)\,dx$.

Hacemos $u = \ln(x^2+2)$ y $dv = dx$; de donde $du = \dfrac{2x\,dx}{x^2+2}$ y $v = x$. Por tanto,

$$\int \ln(x^2+2)\,dx = x\ln(x^2+2) - \int \frac{2x^2\,dx}{x^2+2} = x\ln(x^2+2) - \int\left(2 - \frac{4}{x^2+2}\right)dx$$
$$= x\ln(x^2+2) - 2x + 2\sqrt{2}\,\text{arc tag}\,x/\sqrt{2} + C$$

(Ver Problemas 1-10.)

FORMULAS DE REDUCCION. Las *fórmulas de reducción* permiten simplificar el cálculo cuando se haya de aplicar la integración por partes varias veces consecutivas. (Ver Problema 9.) En general, una fórmula de reducción es aquella que da lugar a una nueva integral de la misma forma que la original, pero con un exponente mayor o menor. Una fórmula de reducción es útil si, finalmente, conduce a una integral que se pueda calcular fácilmente. Algunas de las fórmulas más corrientes de reducción son:

(A) $$\int \frac{du}{(a^2 \pm u^2)^m} = \frac{1}{a^2}\left\{\frac{u}{(2m-2)(a^2 \pm u^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2m-2}\int \frac{du}{(a^2 \pm u^2)^{m-1}}\right\}, \quad m \neq 1$$

(B) $$\int (a^2 \pm u^2)^m\,du = \frac{u(a^2 \pm u^2)^m}{2m+1} + \frac{2ma^2}{2m+1}\int (a^2 \pm u^2)^{m-1}\,du, \quad m \neq -1/2$$

(C) $$\int \frac{du}{(u^2 - a^2)^m} = -\frac{1}{a^2}\left\{\frac{u}{(2m-2)(u^2 - a^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2m-2}\int \frac{du}{(u^2 - a^2)^{m-1}}\right\}, \quad m \neq 1$$

(D) $$\int (u^2 - a^2)^m\,du = \frac{u(u^2 - a^2)^m}{2m+1} - \frac{2ma^2}{2m+1}\int (u^2 - a^2)^{m-1}\,du, \quad m \neq -1/2$$

(E) $$\int u^m e^{au}\,du = \frac{1}{a}u^m e^{au} - \frac{m}{a}\int u^{m-1} e^{au}\,du$$

(F) $$\int \operatorname{sen}^m u\,du = -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} u \cos u}{m} + \frac{m-1}{m}\int \operatorname{sen}^{m-2} u\,du$$

(G) $$\int \cos^m u\,du = \frac{\cos^{m-1} u \operatorname{sen} u}{m} + \frac{m-1}{m}\int \cos^{m-2} u\,du$$

(H) $$\int \operatorname{sen}^m u \cos^n u\,du = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} u \cos^{n-1} u}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \operatorname{sen}^m u \cos^{n-2} u\,du$$

$$= -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} u \cos^{n+1} u}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \operatorname{sen}^{m-2} u \cos^n u\,du, \quad m \neq -n$$

(I) $$\int u^m \operatorname{sen} bu\,du = -\frac{u^m}{b}\cos bu + \frac{m}{b}\int u^{m-1}\cos bu\,du$$

(J) $$\int u^m \cos bu\,du = \frac{u^m}{b}\operatorname{sen} bu - \frac{m}{b}\int u^{m-1}\operatorname{sen} bu\,du$$

(Ver Problema 11.)

Problemas resueltos

1. Calcular $\int x \operatorname{sen} x\,dx$.

Podemos seguir los siguientes caminos:

(*a*) $u = x \operatorname{sen} x$, $dv = dx$; (*b*) $u = \operatorname{sen} x$, $dv = x\,dx$; (*c*) $u = x$, $dv = \operatorname{sen} x\,dx$.

(*a*) $u = x \operatorname{sen} x$, $dv = dx$. Por tanto $du = (\operatorname{sen} x + x\cos x)\,dx$, $v = x$, y

$$\int x \operatorname{sen} x\,dx = x \cdot x \operatorname{sen} x - \int x(\operatorname{sen} x + x\cos x)\,dx$$

La integral que resulta es menos sencilla que la original por la cual se descarta este camino.

(*b*) $u = \operatorname{sen} x$, $dv = x\,dx$. Por tanto $du = \cos x\,dx$, $v = \frac{1}{2}x^2$, y

$$\int x \operatorname{sen} x\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 \operatorname{sen} x - \int \tfrac{1}{2}x^2 \cos x\,dx$$

La integral que resulta es menos sencilla que la original y también descartamos este camino.

(*c*) $u = x$, $dv = \operatorname{sen} x\,dx$. Por tanto $du = dx$, $v = -\cos x$, y

$$\int x \operatorname{sen} x\,dx = -x\cos x - \int -\cos x\,dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x + C$$

2. Calcular $\int xe^x\,dx$.

Sea $u = x$, $dv = e^x\,dx$. Entonces, $du = dx$, $v = e^x$, y

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C$$

3. Calcular $\int x^2 \ln x\,dx$.

Sea $u = \ln x$, $dv = x^2\,dx$. Por tanto, $du = \dfrac{dx}{x}$, $v = \dfrac{x^3}{3}$, y

$$\int x^2 \ln x\,dx \quad \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$$

4. Calcular $\int x\sqrt{1+x}\,dx$.

Haciendo $u = x$, $dv = \sqrt{1+x}\,dx$. Tendremos $du = dx$, $v = \frac{2}{3}(1+x)^{3/2}$, y

$$\int x\sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{3}x(1+x)^{3/2} - \frac{2}{3}\int (1+x)^{3/2}\,dx = \frac{2}{3}x(1+x)^{3/2} - \frac{4}{15}(1+x)^{5/2} + C$$

5. Calcular $\int \text{arc sen}\, x\, dx$.

Haciendo $u = \text{arc sen}\, x$, $dv = dx$. Tendremos $du = dx/\sqrt{1-x^2}$, $v = x$, y

$$\int \text{arc sen}\, x\, dx \;=\; x\, \text{arc sen}\, x - \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} \;=\; x\, \text{arc sen}\, x + \sqrt{1-x^2} + C$$

6. Calcular $\int \text{sen}^2 x\, dx$.

Haciendo $u = \text{sen}\, x$, $dv = \text{sen}\, x\, dx$. Tendremos $du = \cos x\, dx$, $v = -\cos x$, y

$$\int \text{sen}^2 x\, dx \;=\; -\text{sen}\, x \cos x + \int \cos^2 x\, dx$$

$$=\; -\text{sen}\, x \cos x + \int (1 - \text{sen}^2 x)\, dx \;=\; -\tfrac{1}{2}\text{sen}\, 2x + \int dx - \int \text{sen}^2 x\, dx$$

Pasando al primer miembro la integral del segundo,

$$2\int \text{sen}^2 x\, dx \;=\; -\tfrac{1}{2}\text{sen}\, 2x + x + C' \qquad \text{y} \qquad \int \text{sen}^2 x\, dx \;=\; \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\text{sen}\, 2x + C$$

7. Calcular $\int \sec^3 x\, dx$.

Haciendo $u = \sec x$, $dv = \sec^2 x\, dx$. Tendremos $du = \sec x\, \text{tag}\, x\, dx$, $v = \text{tag}\, x$, y

$$\int \sec^3 x\, dx \;=\; \sec x\, \text{tag}\, x - \int \sec x\, \text{tag}^2 x\, dx \;=\; \sec x\, \text{tag}\, x - \int \sec x\,(\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$=\; \sec x\, \text{tag}\, x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx$$

Por tanto $\quad 2\int \sec^3 x\, dx \;=\; \sec x\, \text{tag}\, x + \int \sec x\, dx \;=\; \sec x\, \text{tag}\, x + \ln|\sec x + \text{tag}\, x| + C'$

y $\quad \int \sec^3 x\, dx \;=\; \tfrac{1}{2}\{\sec x\, \text{tag}\, x + \ln|\sec x + \text{tag}\, x|\} + C$

8. Calcular $\int x^2\, \text{sen}\, x\, dx$.

Haciendo $u = x^2$, $dv = \text{sen}\, x\, dx$. Tendremos $du = 2x\, dx$, $v = -\cos x$, y

$$\int x^2\, \text{sen}\, x\, dx \;=\; -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\, dx$$

Haciendo en la integral resultante $u = x$ y $dv = \cos x\, dx$. Tendremos $du = dx$, $v = \text{sen}\, x$, y

$$\int x^2\, \text{sen}\, x\, dx \;=\; -x^2 \cos x + 2\,\{x\, \text{sen}\, x - \int \text{sen}\, x\, dx\}$$

$$=\; -x^2 \cos x + 2x\, \text{sen}\, x + 2\cos x + C$$

9. Calcular $\int x^3 e^{2x}\, dx$.

Haciendo $u = x^3$, $dv = e^{2x}\, dx$. Tendremos $du = 3x^2\, dx$, $v = \tfrac{1}{2}e^{2x}$, y

$$\int x^3 e^{2x}\, dx \;=\; \frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{2}\int x^2 e^{2x}\, dx$$

Haciendo en la integral resultante $u = x^2$ y $dv = e^{2x}\, dx$. Tendremos $du = 2x\, dx$, $v = \tfrac{1}{2}e^{2x}$, y

$$\int x^3 e^{2x}\, dx \;=\; \frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{2}\left\{\frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \int x e^{2x}\, dx\right\} \;=\; \frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{4}x^2 e^{2x} + \frac{3}{2}\int x e^{2x}\, dx$$

Haciendo en la integral resultante $u = x$ y $dv = e^{2x}\, dx$. Tendremos $du = dx$, $v = \tfrac{1}{2}e^{2x}$, y

$$\int x^3 e^{2x}\, dx \;=\; \frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{4}x^2 e^{2x} + \frac{3}{2}\left\{\frac{1}{2}x e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\, dx\right\}$$

$$=\; \frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{4}x^2 e^{2x} + \frac{3}{4}x e^{2x} - \frac{3}{8}e^{2x} + C$$

10. (*a*) Haciendo $= x$, $dv = \dfrac{x\, dx}{(a^2 \pm x^2)^m}$; Tendremos $du = dx$, $v = \dfrac{\mp 1}{(2m-2)(a^2 \pm x^2)^{m-1}}$, y

$$\int \frac{x^2\, dx}{(a^2 \pm x^2)^m} \;=\; \frac{\mp x}{(2m-2)(a^2 \pm x^2)^{m-1}} \pm \frac{1}{2m-2}\int \frac{dx}{(a^2 \pm x^2)^{m-1}}$$

(*b*) Haciendo $u = x$, $dv = x(a^2 \pm x^2)^{m-1}\, dx$; Tendremos $du = dx$, $v = \dfrac{\pm 1}{2m}(a^2 \pm x^2)^m$, y

$$\int x^2 (a^2 \pm x^2)^{m-1}\, dx \;=\; \frac{\pm x}{2m}(a^2 \pm x^2)^m \mp \frac{1}{2m}\int (a^2 \pm x^2)^m\, dx$$

11. Hallar: (*a*) $\int \frac{dx}{(1+x^2)^{5/2}}$, (*b*) $\int (9+x^2)^{3/2}\,dx$.

(*a*) Como la fórmula de reducción (A) reduce a una unidad el exponente del denominador, aplicándola dos veces resulta:

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{5/2}} = \frac{x}{3(1+x^2)^{3/2}} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{3(1+x^2)^{3/2}} + \frac{2}{3}\frac{x}{(1+x^2)^{1/2}} + C$$

(*b*) Aplicando la fórmula de reducción (B),

$$\int (9+x^2)^{3/2}\,dx = \frac{1}{4}x(9+x^2)^{3/2} + \frac{27}{4}\int (9+x^2)^{1/2}\,dx$$
$$= \frac{1}{4}x(9+x^2)^{3/2} + \frac{27}{8}\{x(9+x^2)^{1/2} + 9\ln(x+\sqrt{9+x^2})\} + C$$

Problemas propuestos

12. $\int x\cos x\,dx = x\,\mathrm{sen}\,x + \cos x + C$

13. $\int x\sec^2 3x\,dx = \frac{x}{3}\,\mathrm{tag}\,3x - \frac{1}{9}\ln|\sec 3x| + C$

14. $\int \mathrm{arc}\cos 2x\,dx = x\,\mathrm{arc}\cos 2x - \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + C$

15. $\int \mathrm{arc\,tag}\,x\,dx = x\,\mathrm{arc\,tag}\,x - \ln\sqrt{1+x^2} + C$

16. $\int x^2\sqrt{1-x}\,dx = -\frac{2}{105}(1-x)^{3/2}(15x^2+12x+8) + C$

17. $\int \frac{xe^x\,dx}{(1+x)^2} = \frac{e^x}{1+x} + C$

18. $\int x\,\mathrm{arc\,tag}\,x\,dx = \frac{1}{2}(x^2+1)\,\mathrm{arc\,tag}\,x - \frac{1}{2}x + C$

19. $\int x^2 e^{-3x}\,dx = -\frac{1}{3}e^{-3x}(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}) + C$

20. $\int \mathrm{sen}^3 x\,dx = -\frac{2}{3}\cos^3 x - \mathrm{sen}^2 x\cos x + C$

21. $\int x^3\,\mathrm{sen}\,x\,dx = -x^3\cos x + 3x^2\,\mathrm{sen}\,x + 6x\cos x - 6\,\mathrm{sen}\,x + C$

22. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2(bx-2a)\sqrt{a+bx}}{3b^2} + C$

23. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+x}} = \frac{2}{15}(3x^2-4x+8)\sqrt{1+x} + C$

24. $\int x\,\mathrm{arc\,sen}\,x^2\,dx = \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{arc\,sen}\,x^2 + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^4} + C$

25. $\int \mathrm{sen}\,x\,\mathrm{sen}\,3x\,dx = \frac{1}{8}\,\mathrm{sen}\,3x\cos x - \frac{3}{8}\,\mathrm{sen}\,x\cos 3x + C$

26. $\int \mathrm{sen}(\ln x)\,dx = \frac{1}{2}x(\mathrm{sen}\ln x - \cos\ln x) + C$

27. $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}(b\,\mathrm{sen}\,bx + a\cos bx)}{a^2+b^2} + C$

28. $\int e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\,\mathrm{sen}\,bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + C$

29. (*a*) Poniendo $\int \frac{a^2\,dx}{(a^2\pm x^2)^m} = \int \frac{(a^2\pm x^2)\mp x^2}{(a^2\pm x^2)^m}dx = \int \frac{dx}{(a^2\pm x^2)^{m-1}} \mp \int \frac{x^2\,dx}{(a^2\pm x^2)^m}$ y aplicando el resultado del Problema 10 (*a*) deducir la fórmula de reducción (A).

(*b*) Poniendo $\int (a^2\pm x^2)^m\,dx = a^2\int (a^2\pm x^2)^{m-1}\,dx \pm \int x^2(a^2\pm x^2)^{m-1}\,dx$ y aplicando el resultado del Problema 10 (*b*) deducir la fórmula de reducción (B).

30. Deducir las fórmulas de reducción (C)-(J).

31. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-x^2)^3} = \frac{x(5-3x^2)}{8(1-x^2)^2} + \frac{3}{16}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$ 32. $\displaystyle\int \frac{dx}{(4+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{4(4+x^2)^{1/2}} + C$

33. $\displaystyle\int (4-x^2)^{3/2}\,dx = \tfrac{1}{4}x(10-x^2)\sqrt{4-x^2} + 6 \operatorname{arc\,sen} \tfrac{1}{2}x + C$

34. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-16)^3} = \frac{1}{2048}\left\{\frac{x(3x^2-80)}{(x^2-16)^2} + \frac{3}{8}\ln\left|\frac{x-4}{x+4}\right|\right\} + C$

35. $\displaystyle\int (x^2-1)^{5/2}\,dx = \tfrac{1}{48}x(8x^4-26x^2+33)\sqrt{x^2-1} - \tfrac{5}{16}\ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C$

36. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x\,dx = \tfrac{3}{8}x - \tfrac{3}{8}\operatorname{sen} x\cos x - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}^3 x\cos x + C$

37. $\displaystyle\int \cos^5 x\,dx = \tfrac{1}{15}(3\cos^4 x + 4\cos^2 x + 8)\operatorname{sen} x + C$

38. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x\cos^2 x\,dx = -\tfrac{1}{5}\cos^3 x\,(\operatorname{sen}^2 x + \tfrac{2}{3}) + C$

39. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x\cos^5 x\,dx = \tfrac{1}{9}\operatorname{sen}^5 x\,(\cos^4 x + \tfrac{4}{7}\cos^2 x + \tfrac{8}{35}) + C$

Otro procedimiento útil en los casos más complejos y laboriosos de esta sección, resulta al considerar que en (ver Problema 9)

(i) $$\int x^3e^{2x}\,dx = \tfrac{1}{2}x^3e^{2x} - \tfrac{3}{4}x^2e^{2x} + \tfrac{3}{4}xe^{2x} - \tfrac{3}{8}e^{2x} + C$$

los términos del segundo miembro, sin tener en cuenta los coeficientes, se obtienen al derivar sucesivamente el integrando x^3e^{2x}. Así pues,

(ii) $$\int x^3e^{2x}\,dx = Ax^3e^{2x} + Bx^2e^{2x} + Dxe^{2x} + Ee^{2x} + C$$

y derivando

$$x^3e^{2x} = 2Ax^3e^{2x} + (3A+2B)x^2e^{2x} + (2B+2D)xe^{2x} + (D+2E)e^{2x}$$

Identificando coeficientes, tendremos

$$2A = 1,\quad 3A+2B = 0,\quad 2B+2D = 0,\quad D+2E = 0$$

De donde $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{3}{2}A = -\frac{3}{4}$, $D = -B = \frac{3}{4}$, $E = -\frac{1}{2}D = -\frac{3}{8}$. Sustituyendo A, B, D, E en (ii), obtenemos (i).

Este método se puede aplicar en el cálculo de $\int f(x)\,dx$ siempre que al derivar repetidamente $f(x)$ se obtenga un número finito de términos diferentes.

40. Calcular $\int e^{2x}\cos 3x\,dx = {}^1/_{13}e^{2x}(3\operatorname{sen} 3x + 2\cos 3x) + C$ haciendo

$$\int e^{2x}\cos 3x\,dx = Ae^{2x}\operatorname{sen} 3x + Be^{2x}\cos 3x + C$$

41. Calcular $\int e^{3x}(2\operatorname{sen} 4x - 5\cos 4x)\,dx = {}^1/_{25}\,e^{3x}(-14\operatorname{sen} 4x - 23\cos 4x) + C$ haciendo

$$\int e^{3x}(2\operatorname{sen} 4x - 5\cos 4x)\,dx = Ae^{3x}\operatorname{sen} 4x + Be^{3x}\cos 4x + C$$

42. Calcular $\int \operatorname{sen} 3x\cos 2x\,dx = -{}^1/_5(2\operatorname{sen} 3x\operatorname{sen} 2x + 3\cos 3x\cos 2x) + C$ haciendo

$$\int \operatorname{sen} 3x\cos 2x\,dx = A\operatorname{sen} 3x\operatorname{sen} 2x + B\cos 3x\cos 2x + D\cos 3x\operatorname{sen} 2x + E\operatorname{sen} 3x\cos 2x + C$$

43. Calcular $\displaystyle\int e^{3x}x^2\operatorname{sen} x\,dx = \frac{e^{3x}}{250}\,[25x^2(3\operatorname{sen} x - \cos x) - 10x(4\operatorname{sen} x - 3\cos x) + 9\operatorname{sen} x - 13\cos x] + C$