Tarea 1 – Fundamentos Matemáticos

Secciones §1 y §2

Fecha de entrega: **viernes 13 de septiembre de 2013 en clase.**

1. (40 pts.) Consideremos la siguiente función $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$z := \begin{cases} x - 4n, & \text{para} \quad x \in [4n-1, 4n+1], \\ -x + 4n + 2 & \text{para} \quad x \in [4n+1, 4n+3]. \end{cases}$$

   Muestre que z es uniformemente contínua. (Otra forma de resolver este ejercicio es mostrando que z es contínua en el intervalo $[-1, 3]$ y entonces mostrar que toda función contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que es periódica (es decir, que $\exists\, \omega > 0$ tal que $f(x+\omega) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$), es uniformemente contínua.) Use gráficas para apoyar sus argumentos.

2. (30 pts.) Para la función exponencial $\exp(x) = e^x$, muestre que

$$\exp'(x) = e^x \lim_{\substack{h\to 0 \\ h\neq 0}} \frac{e^h - 1}{h} = e^x.$$

3. (40 pts.) Consideremos a la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x \leq 0, \\ e^{-1/x^2}, & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

   Pruebe que f es infinitamente diferenciable en $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, y que $f^{(k)}(0) = 0$ para toda $k \geq 1$.