Tarea 2 – Fundamentos Matemáticos

Secciones §3, §4, §5 y §6

Fecha de entrega: **viernes 18 de octubre en clase.**

1. (30 pts.) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que $\forall\, x \in \mathbb{R}$ y $c \geq 0$ se cumple
$$|f'(x)| \leq c f(x).$$
   (i) Muestre que $|f(x)| \leq \gamma e^{c|x|}$ para algún $\gamma \geq 0$.
   (ii) Además supongamos que $f(x_0) = 0$ para algún $x_0 \in \mathbb{R}$. Muestre que $f \equiv 0$.

2. (30 pts.) Demuestre el siguiente

   Teorema 1 (5.12)**.** *Sean $f_n, g_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones con $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que las f_n son contínuas y que, para cada n, existe un subconjunto contable $D_n \subset [a,b]$ tal que, $\forall\, x \in I \backslash D_n$*
$$f_n'(x) = g_n(x).$$
   Supongamos además que
   (i) $\exists\, z \in [a,b]$ tal que f_n converge,
   (ii) $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente en $[a,b]$.

   Entonces, f_n converge uniformemente en $[a,b]$ a una función contínua f y que, $\forall\, x \in I \backslash \cup_{n \in \mathbb{N}} D_n$, existe $f'(x)$ y
$$f'(x) = \lim_{n \to \infty} g_n(x).$$

3. (30 pts.) Definimos a las funciones f_n, con $n \in \mathbb{N}$, de la siguiente manera
$$f_n(x) := \begin{cases} \operatorname{sen}(x), & \text{cuando} \quad 2\pi n \leq x \leq 2\pi(n+1), \\ 0, & \text{de otra forma.} \end{cases}$$
   Muestre que las funciones f_n son uniformemente acotadas y equicontínuas y que convergen puntualmente, pero no uniformemente, a 0 (cero).

4. (10 pts.) Demuestre el siguiente

   Lema 1 (6.2)**.** *Si g_1, g_2 son primitivas de f en I, entonces $g_1 - g_2$ es constante en I.*