Tarea y examen final – Fundamentos Matemáticos

Cálculo vectorial

Fecha de entrega: **viernes 8 de noviembre.**

1. (a) Halle los valores máximos y mínimos de la función
$$f(x,y) = x^2y - \frac{1}{3}y^3$$
en el disco $x^2 + y^2 \leq 1$. (b) Halle una función potencial $v(x,y)$ de la función de valor vectorial
$$F(x,y) = (e^x + xe^x + e^y, xe^y),$$
con $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Su solución deberá mostrar un método general para hallar funciones potenciales. Recuerde que si v es una función potencial de F, se debe cumplir que $F(x,y) = \nabla v(x,y)$, con ∇ el operador gradiente.

2. (a) Sea $f(x,y) = 2/(x^2 + 3y^2)$ la altura de una colina en la posición (x,y) sobre un mapa. ¿En qué dirección a partir de $(1,-1)$ se puede ascender más rápido? ¿Cuál será la pendiente encontrada en este ascenso? (b) Halle una ecuación para el plano tangente a la gráfica de la función f en (a) en el punto que corresponde a $x = 1$ y $y = -1$.

3. (a) Describa el interior de una esfera de radio R por medio de desigualdades apropiadas en términos de coordenadas esféricas ρ, θ y ϕ (ver figura). (b) Explique por qué el volumen de los elementos $dxdydz$ y $d\rho d\theta d\phi$ están relacionados por
$$dxdydz = \rho^2 \operatorname{sen} \phi d\rho d\theta d\phi.$$
(c) Calcule la masa de la esfera cuya densidad está dada por
$$D(x,y,z) = \frac{1}{1+\rho^3}.$$

4. Sean x y y dos magnitudes laterales de un triángulo y θ el ángulo que ambas forman medido en radianes. Sea A el área del triángulo. (a) Cuando $\theta = \pi/2$ y $x > y$, ¿qué cambio en magnitud de x o y incrementa más el área A? (b) Y cuando $\theta < \pi/2$, ¿qué cambio en magnitud de x, y o θ ocasiona cambios más pronunciados en A?

5. Deseamos hallar la distancia promedio del origen a puntos dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. (a) De una expresión para la cantidad deseada en términos de una o más integrales múltiples. (b) Exprese estas integrales en un sistema coordenado esférico y evalue dicha cantidad.

6. Ulysse Mérou se halla en problemas en el lado soleado de Mercurio. Cuando se localiza en la posición (x, y, z), la temperatura de la cubierta de su nave está dada por

$$T(x, y, z) = \exp(-x^2 - 2y^2 - 3z^2),$$

donde x, y y z son medidas en metros. Por el momento, su nave se encuentra lozalizada en $(1, 1, 1)$. (a) ¿En qué dirección debería proceder a mover la nave a fin de descender la temperatura lo más rápido posible? (b) Si la nave viaja a e^8 metros por segundo, ¿qué tan rápido descenderá la temperatura si procede en tal dirección? (c) Desafortunadamente, el material de la cubierta de la nave se fracturará si se enfría a una tasa mayor a los $\sqrt{14e^2}$ grados por segundo. Describa el conjunto de direcciones en las cuales él podría proceder a moverse, de tal forma que la temperatura no disminuya a una tasa menor a la que la nave puede soportar.

7. La distribución de masa (es decir, la densidad superficial) sobre una hoja semiesférica $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ está dada por

$$\sigma(x, y, z) = (\sigma_0/R^2)(x^2 + y^2),$$

donde σ_0 es constante. Halle la masa total de dicha hoja.

8. Supongamos que f y g pertenecen a $\mathcal{C}^2(D)$ y sea $D \in \mathbb{R}^3$ un dominio acotado con una superficie suave S. (a) Use el teorema de la divergencia para mostrar que

$$\iint_S g\frac{\partial f}{\partial n}d\sigma = \iiint_D (g\nabla^2 f + \nabla f \cdot \nabla g)dV.$$

(b) Muestre que si $\nabla^2 f = 0$ en D, entonces

$$\iint_S \frac{\partial f}{\partial n}d\sigma = 0.$$

9. Considere al funcional

$$H(u) := -\int_{S^2} u(x)\nabla \cdot \nabla u(x)dx$$

sobre la superficie de la esfera unitaria S^2 en $\mathbb{R}^3$. Muestre que

$$H(u) = \int_{S^2} |\nabla u|^2 \, dx.$$

10. Considere a los campos escalares $f(\theta, \phi)$ y $g(\theta, \phi)$ definidos sobre la superficie de la esfera unitaria S^2, en donde θ es la colatitud (0 en el polo norte y π en el sur) y ϕ es la longitud. Muestre o de un contra ejemplo tal que

$$\int_{S^2} (\nabla_s g \circ \nabla_s g)\, f(\theta, \phi) \operatorname{sen}\theta d\theta d\phi = -\int_{S^2} \left(fg\nabla_s^2 g + g\nabla_s f \circ \nabla_s g\right) \operatorname{sen}\theta d\theta d\phi,$$

donde ∇_s es el operador gradiente sobre S^2 en coordenadas esféricas (θ, ϕ), $\circ$ denota la producto escalar o vectorial y ∇_s^2 es el laplaciano sobre S^2. (Ayuda: use coordenadas cartesianas.)

11. Pruebe la siguiente afirmación. Sea $S^2(R)$ la superficie de la esfera de radio R centrada en el origen. Supongamos que u, v y w son tres campos escalares definidos sobre el espacio euclidiano $\mathbb{R}^3$, $\circ$ denota al producto escalar o vectorial y sea el punto $x := (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Entonces, lo siguiente es cierto

$$\int_{S^2(R)} w(x)\nabla u \circ \nabla v dx = -\int_{S^2(R)} \big(u(x)w(x)\nabla^2 v + u(x)\nabla v \circ \nabla w\big)\, dx.$$

está permitido usar la siguiente expresión

$$\int_{S^2(R)} f_{x_i} g(x) dx = -\int_{S^2(R)} f(x) g_{x_i} dx,$$

donde $f(x)$ y $g(x)$ son funciones escalares sobre $\mathbb{R}^3$ y f_{x_i} denota derivación parcial de f con respecto a la i-ésima coordenada cartesiana.

12. Considere la integral

$$I = \int_\Gamma [M(x,y)dx + N(x,y)dy],$$

donde $M(x,y) = e^{\alpha x}\operatorname{sen}(3y) + y + 2$ y $N(x,y) = e^{\alpha x}\cos(3y)/2 + \beta x + y^2$, α y β son constantes y Γ es una trayectoria que une a los puntos $(0,0)$ y $(1,\pi)$. (a) Evalue a I en el caso $\alpha = 0$ y $\beta = 0$ sobre la trayectoria que consiste de los segmentos rectilíneos que unen a los puntos $(0,0)$ a $(1,0)$ y de $(1,0)$ a $(1,\pi)$. (b) Determine los valores para α y β tales que I sea independiente de la trayectoria de $(0,0)$ a $(1,\pi)$. Evalue I dada su elección de α y β.