

Modelos matemáticos 1 Examen 1 16-P

Prof. Héctor Morales

Fecha de entrega: martes 5 de julio en clase

Se califica sobre 100 pts.

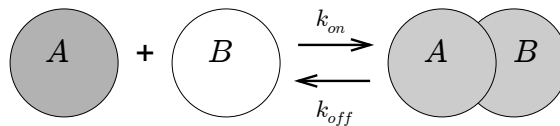
1. **25 pts.** Los siguientes datos describen los cambios de cierta población P en el tiempo t (días):

t	1	2	3	4	5	6	7
P	43	58	76	90	97	106	112

A partir del mapeo logístico:

$$P(t) = \frac{a}{1 + b \exp(ct)}$$

- (a) Halle una relación lineal entre funciones de P y t , según hemos visto en clase.
- (b) De acuerdo con lo anterior, transforme y grafique los datos y verifique que se observa una tendencia lineal. Obtenga una regresión lineal y halle los valores de los parámetros del modelo: a , b y c .
- (c) Grafique sin transformar ambos, el modelo obtenido y los datos. Grafique por separado el error relativo del modelo.
- (d) Emplee el modelo para predecir el tiempo en el cual el valor de la población inicial, al tiempo $t = 0$, se duplica.
2. **25 pts.** Considere la siguiente reacción, en la cual una partícula de la especie A y una de la especie B se combinan para formar un *heterodímero*¹, en el cual las dos partículas se han asociado:



Sea $x(t)$ la concentración del dímero. Al tiempo $t = 0$, tenemos que $x = 0$ (aún no se ha formado ningún dímero), mientras que la concentración de la partícula A es a_0 y la concentración de B es b_0 .

¹Un *homodímero* es una asociación de dos partículas idénticas

- (a) Explique el significado de cada uno de los términos sobre la derecha de la siguiente ecuación diferencial ordinaria, recuerde que $x = x(t)$ y que $x' := dx/dt$:

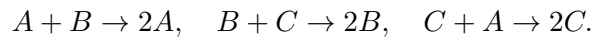
$$x' = k_{\text{on}}(a_0 - x)(b_0 - x) - k_{\text{off}}x. \quad (1)$$

- (b) De la Ecuación (1), ¿por qué se sugiere que $x(t)$ debe ser menor que ambas concentraciones a_0 y b_0 para todo $t \geq 0$?
- (c) El equilibrio se alcanza cuando la tasa de formación del dímero se iguala a la tasa del rompimiento del mismo; o bien, cuando la derivada temporal de la concentración es igual a cero. En tal situación, resuelva la ecuación correspondiente para hallar la concentración de equilibrio $x = x^{\text{eq}}$.
- (d) Si la concentración de equilibrio x^{eq} es mucho menor que el menor valor entre a_0 y b_0 , se puede emplear una ecuación diferencial ordinaria simplificada de la siguiente forma:

$$x' = \Phi - k_{\text{off}}x, \quad (2)$$

en donde el término Φ es constante. Escríbalo en términos de los parámetros empleados en la Ecuación (1) y obtenga la solución a la Ecuación (2), con $x(0) = 0$ y calcule $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$. ¿Qué significa este último límite?

3. **25 pts.** *Competencia cíclica.* Un ejemplo de interacción de más de dos especies es el llamado modelo de “lucha por la existencia”. En este caso 3 especies luchan por sobresalir y el modelo consiste en un conjunto cíclico de interacciones dadas por



- (a) Utilice la “ley de acción de masas” para establecer el conjunto de ecuaciones diferenciales que describen la evolución en el tiempo de cada una de las especies, A, B y C.
- (b) Implemente un código computacional y muestre gráficamente la solución del sistema de ecuaciones con las siguientes condiciones $A(0) = 0.1$, $B(0) = 0.4$ y $C(0) = 0.2$ y emplee un tiempo t de integración de 18 unidades de tiempo.
- (c) Use la función de Octave `plot3` para graficar en el plano fase la curva en 3D descrita por el vector $(A(t), B(t), C(t))$ en $t \in [0, 18]$. ¿Esta curva sugiere la existencia de alguna cantidad conservada? Explique.
4. **25 pts.** El modelo de epidemia SIS (susceptible-infeccioso-susceptible) es descrito mediante el conjunto de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} S' &= rI - kSI, \\ I' &= -rI + kSI. \end{aligned}$$

- (a) Si la suma de las densidades poblaciones es constante; es decir, $S+I = 1$, demuestre que el conjunto de ecuaciones se reduce a un crecimiento logístico. Recuerde que $S = S(t)$ y $I = I(t)$.
- (b) Utilice la condición inicial $I(0) = 1.0$, $k = 0.08$ para la tasa de contacto, $r = 0.01$ para la tasa de recuperación y $t \in [0, 120]$, en un código computacional, para mostrar gráficamente el comportamiento de la solución numérica de la densidad de infecciosos I . ¿Se observa el *crecimiento logístico*?