Tarea examen 2 – Modelos matemáticos 1

Prof. J. Héctor Morales

Fecha de entrega: martes 26 de julio de 2016

1. Considere una partícula browniana de masa m atada a un resorte armónico de constante k, restringida a moverse en una dimensión espacial x en un fluido con viscosidad γ y sujeta a fuerzas "aleatorias" $R(t)$. Las correspondientes ecuaciones de Langevin para la posición x y la velocidad v son

$$\begin{aligned} x' &= v, \\ v' &= -\frac{\gamma}{m}v - \omega_0^2 x + \frac{1}{m}R(t), \end{aligned}$$

donde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Sean x_0 y v_0 la posición y velocidad inicial, respectivamente, de la partícula y supongamos que inicialmente se encuentra en equilibrio con el fluido. Entonces, por el *teorema de equipartición*, la energía promedio es $\frac{1}{2}m\langle v_0^2\rangle_T = \frac{1}{2}k_BT$, y la energía potencial vibracional promedio es $\frac{1}{2}\omega_0^2\langle x_0^2\rangle_T = \frac{1}{2}k_BT$. También supondremos que x_0 y v_0 son estadísticamente independientes, de tal forma que $\langle x_0 v_0\rangle_T = 0$. (**20 pts**) (a) Muestre que para que el proceso sea estacionario, una condición es que la intensidad del ruido sea $g = 4\gamma k_BT$. (**20 pts**) (b) Calcule la función de correlación de la velocidad $\langle\langle v(t_2)v(t_1)\rangle_R\rangle_T$, en donde los subíndices de los promedios $\langle\cdot\rangle_A$, significan promedios respecto a la variable indicada A.

2. (**40 pts**) La *distribución gaussiana* o *normal* es una distribución contínua de una *variable aleatoria* $X \in \mathbb{R}$, y se representa por la expresión

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = \frac{e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}.$$

La distribución depende de dos parámetros, μ y σ, y se refieren a la *media* y la *desviación estándar*, respectivamente. Esta distribución es ubicua en probabilidad y estadística [1]. En el límte $N \to \infty, j \to \infty$ y $(N - j) \to \infty$; es decir, en un gran número de experimentos, un

[1] "Todo mundo cree en ella porque los experimentales se imaginan que es un teorema de matemáticas y los matemáticos que es un hecho experimental", Poincaré, 1908.

gran número de eventos con éxito y un gran número de eventos sin éxito, la *distribución binomial* (caminata aleatoria discreta):

$$\mathrm{Bin}(j;N) = \frac{N!}{j!(N-j)!} p^j q^{N-j},$$

tiende a la distribución gaussiana:

$$(2\pi Npq)^{-1/2} \exp[-(x-Np)^2/2Npq].$$

Para obtener este resultado, haga uso de la aproximación de Stirling

$$\ln M! \sim M \ln M - M + \frac{1}{2} \ln(2\pi M),$$

que es una expresión asintótica con $M \gg 1$ grande. Este teorema límite es un caso especial de un teorema más general, *el teorema del límite central.*

3. (**40 pts**) Difusión con una esfera absorbente. Consideremos la 2a ecuación de Fick o de difusión en 3D:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 C}{\partial x_i^2},$$

con $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ y la concentración $C = C(x,t)$ función de la posición $x \in \mathbb{R}^3$ y del tiempo $t \in \mathbb{R}^+$. El *operador diferencial* $\sum \partial^2/\partial x_i^2$ se llama *laplaciano*. Si existieran fuentes o absorbedores de la sustancia difundiéndose, su concentración se aproximaría a un *estado estacionario*, cuyos valores serán altos cerca de las fuentes y bajo cerca de los absorbedores. En este límite $\partial C/\partial t = 0$. Supongamos, adicionalmente, que la concentración C no depende de ninguna orientación angular en el espacio. En coordenadas esféricas el laplaciano, y por lo tanto la ecuación de difusión, se reduce a la siguiente expresión:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{dC}{dr} \right) = 0,$$

con r la coordenada radial. Consideremos una esfera de radio a dentro de un medio "infinito". En su andar, cada partícula que constituye a la sustancia es absorbida por la esfera, de tal forma que la concentración en $r = a$ es 0. En cambio, la concentración en $r = \infty$ es C_0 constante. Ambas condiciones se llaman *condiciones de frontera*. Halle la solución de la ecuación diferencial para $C(r)$ y calcule el flujo $J(r)$. Grafique C y J *vs* r. Evalue el flujo en $r = a$ y multiplíquelo por el área de la esfera $4\pi a^2$; es decir, obtenga la cantidad $I = 4\pi a^2 J(a)$. ¿Qué unidades tiene I?

4. Método de D'Alembert.

(a) (**20 pts**) Consideremos la ecuación de ondas de la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

en 1D; es decir, el campo de ondas u está definido en una región del espacio euclidiano $\Omega \in (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, donde el parámetro c se llama *velocidad de propagación* de las ondas. Consideremos el siguiente cambio de variables

$$p = x - ct \quad \text{y} \quad q = x + ct.$$

Obtenga entonces la transformación de la ecuación de ondas a la siguiente en las nuevas variables:

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial p \partial q} = 0.$$

Y concluya que, integrando esta ecuación diferencial, $u = f(p) + g(q)$; es decir, que la solución general de la ecuación de ondas en las variables originales se debe poder escribir como

$$u(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct),$$

con f y g funciones arbitarias.

(b) (**20 pts**) Consideremos un campo de temperatura v sobre una barra metálica longitudinal, cuya evolución en el tiempo está dada por la ecuación de conducción de calor:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \kappa\frac{\partial v}{\partial t}.$$

En este caso v evoluciona sobre una región del espacio $\Gamma \in (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, tal que la *conductividad térmica* $\kappa > 0$. Emplee el método de D'Alembert descrito en (a) para resolver esta ecuación diferencial; es decir, substituya una solución tipo onda viajera $v = f(x - ct)$ en la ecuación de calor y describa a la solución en términos de $\kappa > 0$, $x \to -\infty$ y $t \to +\infty$. ¿Sería aceptable esta solución físicamente? Lo mismo se podría concluir para una onda viajando en dirección opuesta; es decir, $v = g(x + cT)$. Si estas soluciones no fueran aceptables físicamente para valores reales de κ, querría decir que los cambios locales de la temperatura en la barra metálica, dictados por la ecuación de calor, no se propagan en forma de onda, como lo haría una compresión mecánica de un extremo al otro de la barra. Sin embargo, si κ fuera puramente imaginaria, las soluciones tipo onda serían posibles. De hecho, la ondas en *mecánica cuántica* obedecen, precisamente, a ecuaciones de calor o difusión con coeficientes complejos. El modelo matemático, que describe la propagación de ondas en mecánica cuántica, se conoce como *ecuación de Schrödinger*.