Nota sobre problema 1

Héctor Morales

En el primer problema, inciso (e), después de eliminar el parámetro t de las ecuaciones diferenciales, deberían obtener:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y/\tau + \omega_0^2 x}{y}.$$

Esta ecuación es homogénea y se puede integrar mediante separación de variables, introduciendo una variable auxiliar u, definida como $y = ux$. Omitiendo los cálculos, deberían poder obtener la siguiente expresión:

$$y^2 + \frac{1}{\tau}xy + \omega_0^2 x^2 = C \exp\left[\frac{1}{\tau\omega_1} \arctan\left(\frac{y + x/2\tau}{\omega_1 x}\right)\right].$$

El lado izquierdo se puede reducir a $(y + x/2\tau)^2 + \omega_1^2 x^2$ e, introduciendo primeramente las variables $u = \omega_1 x$ y $v = y + x/2\tau$, se puede simplificar la expresión de la siguiente forma

$$v^2 + u^2 = C \exp\left[\frac{1}{\tau\omega_1} \arctan\left(\frac{v}{u}\right)\right].$$

Ahora bien, en términos de coordenadas polares $u = r\cos\theta$ y $v = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, la última ecuación se convierte en

$$r = \sqrt{C} \exp\left[\frac{1}{2\tau\omega_1}\theta\right].$$

La trayectoria fase es ahora una espiral logarítmica y reconocemos, de esta forma, que el origen es un punto singular focal, tal que es estable si $\tau > 0$ o inestable si $\tau < 0$. Esta última situación se podría presentar físicamente si el sistema oscilatorio *absorbiera* energía en vez de disiparla, como en ingeniería eléctrica en donde se emplea el concepto de "resistencia negativa".