Tarea 2 – Modelos matemáticos 1

Héctor Morales

Fecha de entrega: lunes 20 de junio de 2016.

1. Consideremos los siguientes datos. Supongamos que los mismo datos se pueden describir por medio de una función $y = c + ax^b$, donde a, b y c son constantes.

x	0	1	2	3	4
y	100	101	111	140	217

   (a) Transforme la relación $y = c + ax^b$ a una lineal entre funciones de y y x, y emplee los datos para probar lo adecuado de dicha transformación. Obtenga los parámetros del modelo mediante mínimos cuadrados; es decir, obtenga los valores de las constantes.

   (b) Sin la transformación, grafique los datos y el modelo con los valores obtenidos de los parámetros.

   (c) Calcule el error relativo de la diferencia entre los datos y el modelo, y grafíque esta diferencia.

2. Supongamos que, en cierta reacción química, una sustancia P se transforma en una sustancia X. Sea p la concentración inicial de P y $x(t)$ la concentración de X en el instante t. Entonces, $p - x(t)$ es la concentración de P al tiempo t. Además, supongamos que la reacción es catalítica; es decir, la reacción es estimulada por la misma sustancia que se está produciendo. Por lo tanto, la tasa dx/dt es proporcional tanto a x como a $p - x$, por lo tanto

$$\frac{dx}{dt} = kx(p - x),$$

   donde $k > 0$ es una constante. Si $x(0) = x_0$, encuentre a $x(t)$.

3. Algunas enfermedades, como la tifoidea, se dispersan gracias a los *portadores* (individuos que pueden transmitirlas, pero que no presentan síntomas manifiestos). Denotemos por $x(t)$ y $y(t)$, respectivamente, a la densidad de los portadores y a la de los susceptibles (sanos) dentro de una población en el instante de tiempo t. Supongamos que los portadores disminuyen a una tasa proporcional a su número dentro de la población (densidad x); es decir,

$$\frac{dx}{dt} = -ax, \tag{1}$$

   con $a > 0$ la constante de proporcionalidad. Supongamos también que la enfermedad se dispersa a una tasa proporcional al producto de x y y; es decir,

$$\frac{dy}{dt} = -bxy, \quad b > 0. \tag{2}$$

   (a) Determine a x para cualquier instante de tiempo t resolviendo la ecuación diferencial (1).

   (b) Use el resultado del inciso (a) para encontrar a $y(t)$ para todo tiempo t, resolviendo la ecuación diferencial (2) sujeta a la condición inicial $y(0) = y_0$.

(c) Encuentre la proporción de la población que se escapa de la epidemia; es decir, determine el valor límite de y conforme $t \to \infty$. Determine también en qué forma varía esta cantidad con los parámetros a y b.

4. Tenemos datos de la concentración C de veneno de *Micrurus fulvius*, en sangre de borrego, a lo largo del tiempo t. Se puede mostrar que si les aplicamos una transformación *ad hoc*, $\log \log C =: Y(t)$, observamos una relación casi lineal entre Y y t como la mostrada en la Figura 1. Los datos están disponibles en la página del curso.

   (a) ¿Qué ecuación diferencial podría ser candidata como modelo matemático para describir la dinámica de C en el tiempo? ¿Cuál sería la relación funcional explícita entre C y t? Por cada serie de datos, de cada uno de los borregos, ¿cuántos parámetros se necesitan para describir tal dinámica y qué podrían significar?

   (b) En el problema de Lotka-Volterra ajustamos ordenada al origen y pendiente a los datos transformados. La diferencia es que ahora nuestra transformación, que "linealiza" la tendencia de los datos, es $\log \log C$. Obtenga el ajuste por mínimos cuadrados, tal y como se mostró en clase en el problema de Lotka-Volterra. Muestren sus resultados en una gráfica sin transformar los datos; es decir, grafiquen a C *vs* t, para cada uno de los cuatro borregos.

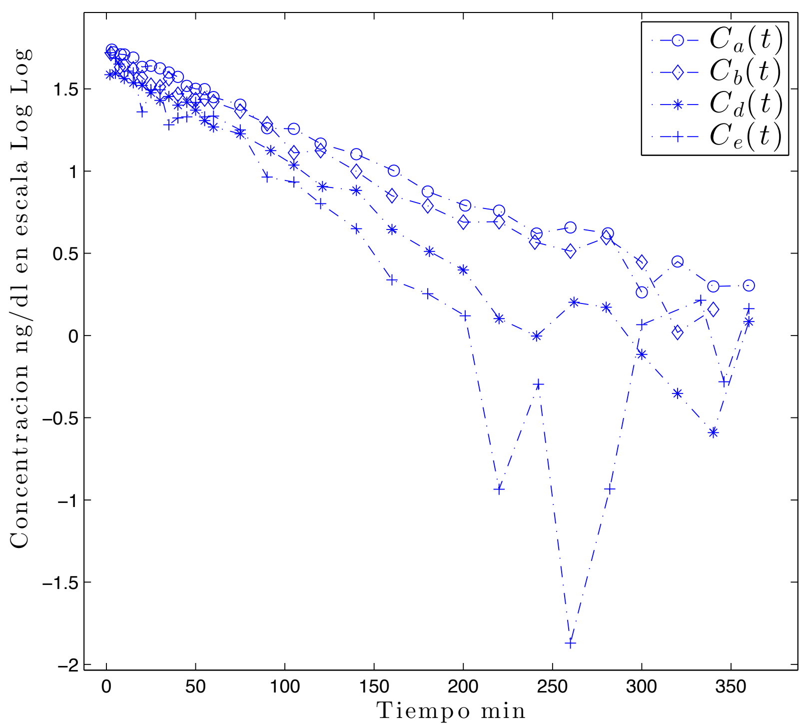

Figura 1: Cinética en sangre de la concentración de veneno de Micrurus fulvius (serpiente coral) para cuatro distintos borregos: a, b, d y e.