Tarea 3 – Modelos matemáticos 1

Prof. J. Héctor Morales

Fecha de entrega: miércoles 9 de diciembre de 2015

1. Quizá la ecuación diferencial más famosa, que aparece como modelo matemático en las ciencias naturales, es la ecuación investigada por Liénard en 1928: $x'' + f(x)x' + g(x) = 0$. En esta ecuación, el término f se conoce como *amortiguamiento* y g como *fuerza de restitución* o *rigidez*. Esta ecuación representa sistemas mecánicos y eléctricos de resistencia-inductancia-capacitancia. En este ejercicio vamos a investigar tanto las soluciones de esta ecuación como el comportamiento de su energía asociada. Denotemos por $x(t)$ a la posición de nuestro oscilador de masa m al tiempo t, por $v(t) = x'(t)$ a su velocidad, por $f(x) = -\gamma$, con $\gamma > 0$ constante y a $g(x) = -kx(t)$, con $k > 0$. El sistema de ecuaciones diferenciales equivalente es, para esta ecuación,

$$x' = v, \tag{1}$$

$$mv' = -\gamma v - kx. \tag{2}$$

   (a) Establezca y describa los puntos críticos de este sistema.

   (b) Si denotamos por $\tau = m/\gamma$, ¿qué unidades tiene esta cantidad τ y qué representa físicamente? También explique el término $\omega_0^2 = k/m$. Reescriba al sistema en términos de τ y ω_0.

   (c) A fin de determinar la conservación o no de la energía de este sistema, multiplique a la Ecuación (2) por v y observe que $(v^2/2)' = vv'$, y que $(x^2/2)' = xv$. Denotemos por H a la parte cuadrática de la energía; es decir, $H = v^2/2 + \omega_0^2 x^2/2$, y obtenga la siguiente expresión para H:

$$H(t) = H_0 e^{-2t/\tau} + \int_0^t U(s) e^{-2(t-s)/\tau} ds, \tag{3}$$

   donde $U(t) := \omega_0^2 x^2(t)/2$ es la energía potencial del oscilador. A partir de aquí se podría concluir que la energía *no se conserva*, ¿por qué?

(d) Supongamos que en algún instante de tiempo la masa de oscilador se libera del resorte; es decir, súbitamente $k = 0$. Denote por $K(t) := v^2(t)/2$ a la energía cinética. Obtenga, del razonamiento anterior, una expresión para K como función del tiempo. Explique. Por otro lado, en la Ecuación (3), ¿qué ocurre físicamente cuando $\tau \to 0$ y cuando $\gamma = 0$?

(e) Del sistema de ecuaciones (1) y (2), reescrito en términos de τ y ω_0, elimine al parámetro tiempo t, de tal forma que obtenga una ecuación diferencial para v en términos de x; es decir, una relación $dv/dx = f(x, v)$. Integre esta ecuación diferencial homogénea mediante separación de variables y halle una trayectoria en el plano fase. Del inciso (c) se sugiere que, si la energía se disipa, es porque las trayectorias en el plano fase podrían ser espirales, concluyendo que el origen es un punto singular focal. Demuestre que este punto es estable o inestable según el parámetro γ sea positivo o negativo. ¿Qué significaría físicamente que $\gamma < 0$?

2. La *distribución gaussiana* o *normal* es una distribución contínua de una *variable aleatoria* $X \in \mathbb{R}$, y se representa por la expresión

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = \frac{e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}.$$

La distribución depende de dos parámetros, μ y σ, y se refieren a la *media* y la *desviación estándar*, respectivamente. Esta distribución es ubicua en probabilidad y estadística [1]. En el límte $N \to \infty, j \to \infty$ y $(N - j) \to \infty$; es decir, en un gran número de experimentos, un gran número de eventos con éxito y un gran número de eventos sin éxito, la *distribución binomial* (caminata aleatoria discreta):

$$\mathrm{Bin}(j; N) = \frac{N!}{j!(N-j)!} p^j q^{N-j},$$

tiende a la distribución gaussiana:

$$(2\pi Npq)^{-1/2} \exp[-(x - Np)^2/2Npq].$$

Para obtener este resultado, haga uso de la aproximación de Stirling

$$\ln M! \sim M \ln M - M + \frac{1}{2}\ln(2\pi M),$$

[1] "Todo mundo cree en ella porque los experimentales se imaginan que es un teorema de matemáticas y los matemáticos que es un hecho experimental", Poincaré, 1908.

que es una expresión asintótica con $M \gg 1$ grande. Compare con el resultado visto en clase. Este teorema límite es un caso especial de un teorema más general, *el teorema del límite central*.

3. Difusión con una esfera absorbente. Consideremos la 2a ecuación de Fick o de difusión en 3D:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 C}{\partial x_i^2},$$

con $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ y la concentración $C = C(x, t)$ función de la posición $x \in \mathbb{R}^3$ y del tiempo $t \in \mathbb{R}^+$. El *operador diferencial* $\sum \partial^2/\partial x_i^2$ se llama *laplaciano*. Si existieran fuentes o absorbedores de la sustancia difundiéndose, su concentración se aproximaría a un *estado estacionario*, cuyos valores serán altos cerca de las fuentes y bajo cerca de los absorbedores. En este límite $\partial C/\partial t = 0$. Supongamos, adicionalmente, que la concentración C no depende de ninguna orientación angular en el espacio. En coordenadas esféricas el laplaciano, y por lo tanto la ecuación de difusión, se reduce a la siguiente expresión:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{dC}{dr} \right) = 0,$$

con r la coordenada radial. Consideremos una esfera de radio a dentro de un medio "infinito". En su andar, cada partícula que constituye a la sustancia es absorbida por la esfera, de tal forma que la concentración en $r = a$ es 0. En cambio, la concentración en $r = \infty$ es C_0 constante. Ambas condiciones se llaman *condiciones de frontera*. Halle la solución de la ecuación diferencial para $C(r)$ y calcule el flujo $J(r)$. Grafique C y J *vs* r. Evalue el flujo en $r = a$ y multiplíquelo por el área de la esfera $4\pi a^2$; es decir, obtenga la cantidad $I = 4\pi a^2 J(a)$. ¿Qué unidades tiene I?

4. Método de D'Alembert.

   (a) Consideremos la ecuación de ondas de la siguiente forma:

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

   en 1D; es decir, el campo de ondas u está definido en una región del espacio euclidiano $\Omega \in (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, donde el parámetro c se llama *velocidad de propagación* de las ondas. Consideremos el siguiente cambio de variables

   $$p = x - ct \quad \text{y} \quad q = x + ct.$$

Obtenga entonces la transformación de la ecuación de ondas a la siguiente en las nuevas variables:
$$4\frac{\partial^2 u}{\partial p \partial q} = 0.$$
Y concluya que, integrando esta ecuación diferencial, $u = f(p) + g(q)$; es decir, que la solución general de la ecuación de ondas en las variables originales se debe poder escribir como
$$u(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct),$$
con f y g funciones arbitarias.

(b) Consideremos un campo de temperatura v sobre una barra metálica longitudinal, cuya evolución en el tiempo está dada por la ecuación de conducción de calor:
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \kappa \frac{\partial v}{\partial t}.$$
En este caso v evoluciona sobre una región del espacio $\mathit{\Gamma} \in (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, tal que la *conductividad térmica* $\kappa > 0$. Emplee el método de D'Alembert descrito en (a) para resolver esta ecuación diferencial; es decir, substituya una solución tipo onda viajera $v = f(x - ct)$ en la ecuación de calor y describa a la solución en términos de $\kappa > 0$, $x \to -\infty$ y $t \to +\infty$. ¿Sería aceptable esta solución físicamente? Lo mismo se podría concluir para una onda viajando en dirección opuesta; es decir, $v = g(x + cT)$. Si estas soluciones no fueran aceptables físicamente para valores reales de κ, querría decir que los cambios locales de la temperatura en la barra metálica, dictados por la ecuación de calor, no se propagan en forma de onda, como lo haría una compresión mecánica de un extremo al otro de la barra. Sin embargo, si κ fuera puramente imaginaria, las soluciones tipo onda serían posibles. De hecho, la ondas en *mecánica cuántica* obedecen, precisamente, a ecuaciones de calor o difusión con coeficientes complejos. El modelo matemático, que describe la propagación de ondas en mecánica cuántica, se conoce como *ecuación de Schrödinger.*