

Tarea 1 – Modelos matemáticos 1

Prof. J. Héctor Morales

Fecha de entrega: martes 27 de octubre de 2015

1. Analizar el sistema Lotka-Volterra (visto en clase) en el plano fase, sus puntos críticos, las nulleclinas (isoclinas de crecimiento cero) y, de ser posible, hallar las cantidades conservadas del sistema, o bien, las hipótesis bajo las que se pueden hallar. Se podría necesitar transformar primero el sistema.

2. Consideremos el siguiente conjunto de datos (x, y) .

x	1	2	3	4	5	6	7
y	100	25	11	6	4	3	2

- (a) Grafique por separado $\ln y$ contra x y contra $\ln x$. Compare los datos con una relación lineal, si es que alguno de estos gráficos tuviera tal tendencia.
- (b) Grafique sobrepuestos los datos y el modelo lineal.
- (c) Calcule el error relativo de su modelos en porcentajes y gráfíquelos. ¿Cuál es el valor máximo del error?
- (d) En el modelo, ¿para qué valor de x el valor de y , evaluada en $x = 2.5$, se reduce en 25%?

3. Consideremos los siguientes datos. Supongamos que los mismo datos se pueden describir por medio de una función $y = c + ax^b$, donde a , b y c son cualquier constante.

x	0	1	2	3	4
y	100	101	111	140	217

- (a) Transforme la relación $y = c + ax^b$ y emplee los datos para probar lo adecuado de buscar relación lineales de las variables transformadas. Proponga un modelo para determinar los valores de los parámetros mediante regresión lineal.
- (b) Grafique la tabla de datos y el modelo que sigue la relación anterior.
- (c) Calcule el error relativo del modelo en % y gráfíquelos.
- (d) Halle el valor de x en el cual el valor de $y(x = 0)$ es el doble.

4. Capture los datos poblacionales de los EUA, desplegados en la Tabla 1.5 del texto, página 16, en un archivo de datos con extensión '.txt'.

- (a) Realice un ajuste polinomial de segundo grado a los datos. Muestre en una gráfica el ajuste y diga cuántos y cuáles puntos se usaron para tal ajuste. En otra gráfica muestre el error relativo de aproximación.
- (b) Basados en el modelo polinomial, calcule y diga cuánto es el acumulado de población total desde el primer año del registro hasta el último. Para ello aproxime el área bajo la gráfica del polinomio, según vimos en clase.
- (c) Basado en el modelo, calcule numéricamente la tasa de cambio a lo largo del tiempo, según vimos en clase. Emplee el esquema de diferencias centradas en esta aproximación. En una misma gráfica, muestre e identifique claramente tanto a los datos como a su tasa de cambio. ¿Esta tasa de cambio es aproximadamente una relación lineal? Explique.

5. Los siguientes datos describen los cambios de cierta población P en el tiempo t (días):

t	1	2	3	4	5	6	7
P	43	58	76	90	97	106	112

Desarrolle un modelo para los datos basado en el mapeo logístico:

$$P(t) = \frac{a}{1 + b \exp(ct)}$$

- (a) Reescriba a esta función como una relación lineal entre variables transformadas, según hemos visto en clase.
 - (b) Grafique los datos transformados de tal forma que la linealización tenga sentido. Compare los datos en esta gráfica con un función lineal para hallar los parámetros del modelo: a , b y c . Recuerde que estos valores no son únicos.
 - (c) Grafique el modelo obtenido y los datos sin transformar. Grafique por separado el error relativo del modelo.
 - (d) Emplee el modelo para predecir el tiempo en el cual la población inicial, al tiempo $t = 0$, se duplica.
6. Considere los siguientes datos de temperatura global anómala T y la concentración de bióxido de carbono CO_2 en la atmósfera:

t	1995	1997	1999	2001	2003	2005	2007
CO_2	362.62	363.47	368.14	371.07	375.78	379.76	383.71
T	0.276	0.355	0.262	0.400	0.457	0.479	0.404

- (a) Emplee los datos para graficar por separado a T y a CO_2 como funciones del tiempo t . Grafique sobre la figura de los datos del CO_2 una función lineal que los aproxime. Grafique sobre la figura de los datos de T tres funciones lineales. La primera y la segunda de estas funciones tienen que darnos la cota inferior y superior de T como función de t . La tercer función lineal, que deberá representar al mejor modelo, debe mostrar el promedio de las cotas inferior y superior.

- (b) Presente a las funciones lineales de acuerdo con las fórmulas

$$\text{CO}_2 = a + b(t - 2007), \quad T = \frac{t - 2007}{e} + c \pm d,$$

donde a , b , c , d y e son constantes que ustedes tienen que determinar.

- (c) Combinen a $\text{CO}_2(t)$ y a $T(t)$ para formar una función $T(\text{CO}_2)$ de acuerdo con la fórmula

$$T = \frac{\text{CO}_2 - A}{B} \pm C,$$

donde A , B y C son constantes que ustedes deben determinar.

- (d) Consideren los valores $T = 0.4^\circ\text{C}$ y $\text{CO}_2 = 384$ ppmv en $t = 2007$. Suponga que las concentraciones de CO_2 se incrementan en un 10% en comparación con $\text{CO}_2 = 384$ ppmv. ¿Cuál será el incremento correspondiente de temperatura en relación a $T = 0.4^\circ\text{C}$? Puede despreciar la incertidumbre en la temperatura.