

## 2.4 Transformaciones de funciones

En esta sección se estudia cómo ciertas transformaciones de una función afectan su gráfica. Esto proporciona una mejor comprensión de cómo graficar funciones. Las transformaciones que se estudian son desplazamiento, reflexión y estiramiento.

### Desplazamiento vertical

Sumar una constante a una función desplaza su gráfica en dirección vertical: hacia arriba si la constante es positiva y hacia abajo si es negativa.

#### Ejemplo 1 Desplazamientos verticales de gráficas

Use la gráfica de  $f(x) = x^2$  para trazar la gráfica de cada función.

a)  $g(x) = x^2 + 3$       b)  $h(x) = x^2 - 2$

**Solución** La función  $f(x) = x^2$  se graficó en el ejemplo 1(a), sección 2.2. Se traza de nuevo en la figura 1.

a) Observe que

$$g(x) = x^2 + 3 = f(x) + 3$$

Así que la coordenada  $y$  de cada punto sobre la gráfica de  $g$  está tres unidades arriba del punto correspondiente sobre la gráfica de  $f$ . Esto significa que para graficar  $g$  se desplaza la gráfica de  $f$  hacia arriba tres unidades, como en la figura 1.

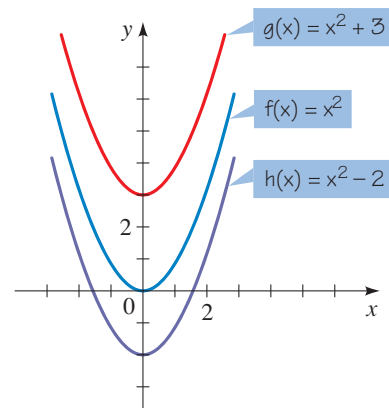


Figura 1

b) De manera similar, para graficar  $h$  se desplaza la gráfica de  $f$  hacia abajo dos unidades, como se muestra. ■

En general, suponga que se conoce la gráfica de  $y = f(x)$ . Cómo se obtienen de ésta las gráficas de

$$y = f(x) + c \quad \text{y} \quad y = f(x) - c \quad (c > 0)$$

La coordenada  $y$  de cada punto sobre la gráfica de  $y = f(x) + c$  está  $c$  unidades arriba de la coordenada  $y$  del punto correspondiente sobre la gráfica de  $y = f(x)$ . Así, la gráfica de  $y = f(x) + c$  se obtiene simplemente al desplazar  $c$  unidades hacia arriba la gráfica de  $y = f(x)$ . De manera similar, se obtiene la gráfica de  $y = f(x) - c$  al desplazar  $c$  unidades hacia abajo la gráfica de  $y = f(x)$ .

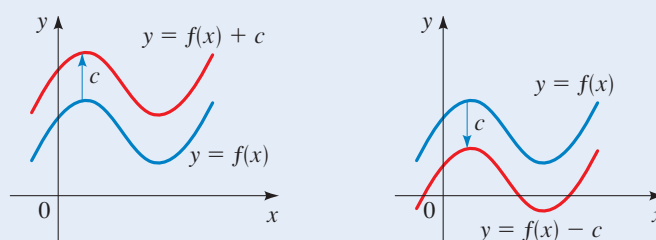
Recuerde que la gráfica de la función  $f$  es la misma que la gráfica de la ecuación  $y = f(x)$ .

### Desplazamientos verticales de gráficas

Suponga que  $c > 0$ .

Para graficar  $y = f(x) + c$ , desplace  $c$  unidades hacia arriba la gráfica de  $y = f(x)$ .

Para graficar  $y = f(x) - c$ , desplace  $c$  unidades hacia abajo la gráfica de  $y = f(x)$ .



### Ejemplo 2 Desplazamientos verticales de gráficas

Use la gráfica de  $f(x) = x^3 - 9x$ , que se trazó en el ejemplo 12, sección 1.8, para bosquejar la gráfica de cada función.

a)  $g(x) = x^3 - 9x + 10$       b)  $h(x) = x^3 - 9x - 20$

**Solución** La gráfica de  $f$  se traza de nuevo en la figura 2.

- a) Para graficar  $g$  la gráfica de  $f$  se desplaza 10 unidades hacia arriba, como se muestra.  
 b) Para graficar  $h$  la gráfica de  $f$  se desplaza 20 unidades hacia abajo, como se muestra.

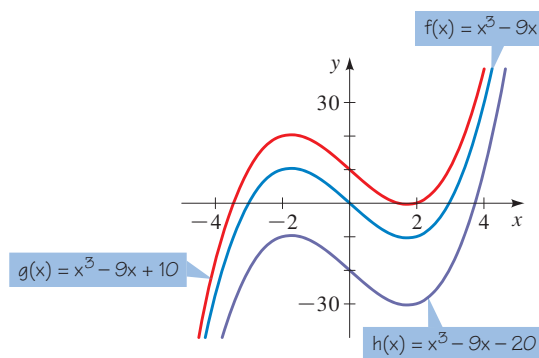


Figura 2

### Desplazamiento horizontal

Suponga que se conoce la gráfica de  $y = f(x)$ . ¿Cómo se emplea para obtener las gráficas de

$$y = f(x + c) \quad \text{y} \quad y = f(x - c) \quad (c > 0)$$

El valor de  $f(x - c)$  en  $x$  es el mismo que el valor de  $f(x)$  en  $x - c$ . Puesto que  $x - c$  está  $c$  unidades a la izquierda de  $x$ , se deduce que la gráfica de  $y = f(x - c)$

es la gráfica de  $y = f(x)$  desplazada a la derecha  $c$  unidades. Con un razonamiento similar se demuestra que la gráfica de  $y = f(x + c)$  es la gráfica de  $y = f(x)$  desplazada a la izquierda  $c$  unidades. En el cuadro siguiente se resumen estos hechos.

**Desplazamientos horizontales de gráficas**

Supóngase que  $c > 0$ .

Para graficar  $y = f(x - c)$ , desplace la gráfica de  $y = f(x)$  a la derecha  $c$  unidades.

Para graficar  $y = f(x + c)$ , desplace la gráfica de  $y = f(x)$  a la izquierda  $c$  unidades.

**Ejemplo 3** Desplazamientos horizontales de gráficas



Use la gráfica de  $f(x) = x^2$  para trazar la gráfica de cada función.

- a)  $g(x) = (x + 4)^2$       b)  $h(x) = (x - 2)^2$

**Solución**

- a) Para graficar  $g$ , la gráfica de  $f$  se desplaza 4 unidades a la izquierda.  
 b) Para graficar  $h$ , la gráfica de  $f$  se desplaza 2 unidades a la derecha.

Las gráficas de  $g$  y  $h$  se bosquejan en la figura 3.

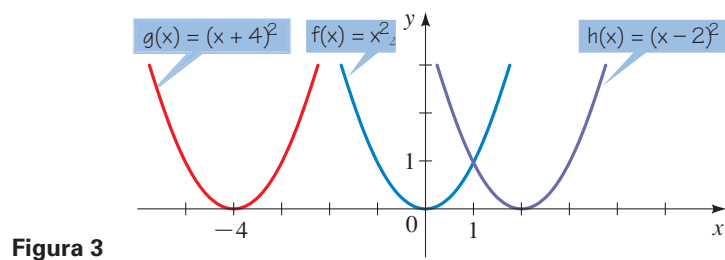


Figura 3

**Ejemplo 4** Combinación de desplazamientos horizontales y verticales

Bosqueje la gráfica de  $f(x) = \sqrt{x - 3} + 4$ .

**Solución** Se empieza con la gráfica de  $y = \sqrt{x}$  (ejemplo 1(c), sección 2.2) y se desplaza a la derecha 3 unidades para obtener la gráfica de  $y = \sqrt{x - 3}$ . Luego, la

gráfica resultante se desplaza 4 unidades hacia arriba para obtener la gráfica de  $f(x) = \sqrt{x-3} + 4$  mostrada en la figura 4.

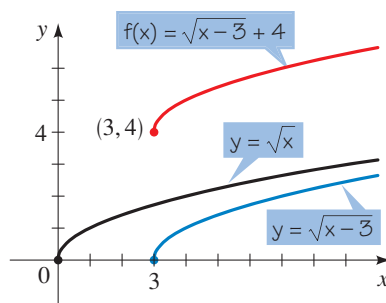


Figura 4

### Reflexión de gráficas

Suponga que se conoce la gráfica de  $y = f(x)$ . ¿Cómo se emplea para obtener las gráficas de  $y = -f(x)$  y  $y = f(-x)$ ? La coordenada  $y$  de cada punto sobre la gráfica de  $y = -f(x)$  es simplemente el negativo de la coordenada  $y$  del punto correspondiente en la gráfica de  $y = f(x)$ . Por lo tanto, la gráfica deseada es la reflexión de la gráfica de  $y = f(x)$  en el eje  $x$ . Por otro lado, el valor de  $y = f(-x)$  en  $x$  es el mismo que el valor de  $y = f(x)$  en  $-x$  por consiguiente, la gráfica deseada aquí es la reflexión de la gráfica de  $y = f(x)$  en el eje  $y$ . En el cuadro siguiente se resumen estas observaciones.

**Reflexión de gráficas**

Para graficar  $y = -f(x)$ , refleje la gráfica de  $y = f(x)$  en el eje  $x$ .

Para graficar  $y = f(-x)$ , refleje la gráfica de  $y = f(x)$  en el eje  $y$ .

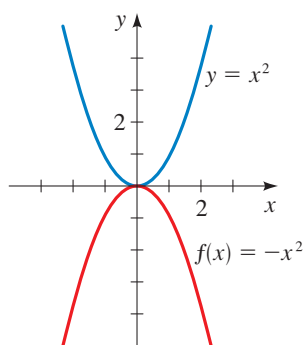


Figura 5

### Ejemplo 5 Reflexión de gráficas

Trace la gráfica de cada función

- (a)  $f(x) = -x^2$       (b)  $g(x) = \sqrt{-x}$

#### Solución

- a) Se empieza con la gráfica de  $y = x^2$ . La gráfica de  $f(x) = -x^2$  es la gráfica de  $y = x^2$  reflejada en el eje  $x$  (véase figura 5).

- b) Se inicia con la gráfica de  $y = \sqrt{x}$  (ejemplo 1(c) en la sección 2.2). La gráfica de  $g(x) = \sqrt{-x}$  es la gráfica de  $y = \sqrt{x}$  reflejada en el eje  $y$  (véase figura 6). Note que el dominio de la función  $g(x) = \sqrt{-x}$  es  $\{x \mid x \leq 0\}$ .

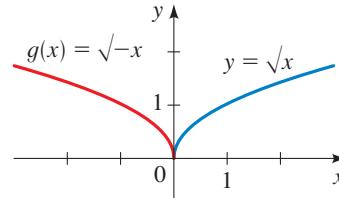


Figura 6

### Estiramiento y acortamiento vertical

Suponga que se conoce la gráfica de  $y = f(x)$ . ¿Cómo se usa para obtener la gráfica de  $y = cf(x)$ ? La coordenada  $y$  de  $y = cf(x)$  en  $x$  es la misma que la coordenada  $y$  correspondiente de  $y = f(x)$  multiplicada por  $c$ . Multiplicar las coordenadas  $y$  por  $c$  tiene el mismo efecto de alargar y acortar verticalmente la gráfica por un factor de  $c$ .

#### Estiramiento y acortamiento vertical de gráficas

Para graficar  $y = cf(x)$ :

Si  $c > 1$ , alargue verticalmente la gráfica de  $y = f(x)$  por un factor de  $c$ .

Si  $0 < c < 1$ , acorte verticalmente la gráfica de  $y = f(x)$  por un factor de  $c$ .

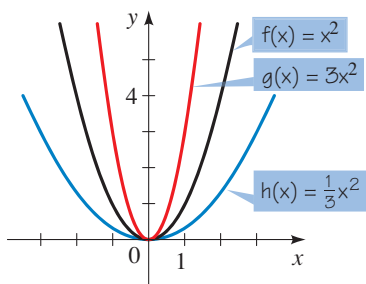
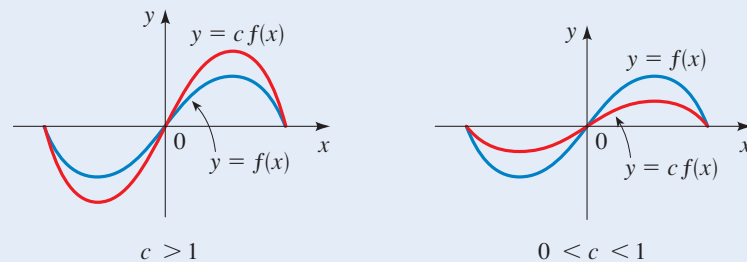


Figura 7

#### Ejemplo 6 Estiramiento y acortamiento vertical de gráficas



Use la gráfica de  $f(x) = x^2$  para trazar la gráfica de cada función.

- a)  $g(x) = 3x^2$       b)  $h(x) = \frac{1}{3}x^2$

#### Solución

- a) La gráfica de  $g$  se obtiene al multiplicar la coordenada  $y$  de cada punto sobre la gráfica de  $f$  por 3. Es decir, para obtener la gráfica de  $g$  se alarga la gráfica de  $f$  verticalmente por un factor de 3. El resultado es la parábola más estrecha en la figura 7.
- b) La gráfica de  $h$  se obtiene al multiplicar la coordenada  $y$  de cada punto sobre la gráfica de  $f$  por  $\frac{1}{3}$ . Es decir, para obtener la gráfica de  $h$  se acorta verticalmente la gráfica de  $f$  por un factor de  $\frac{1}{3}$ . El resultado es la parábola más amplia en la figura 7.

En el ejemplo siguiente se ilustra el efecto de combinar desplazamientos, reflexiones y estiramiento.

### Ejemplo 7 Combinación de desplazamiento, estiramiento y reflexión

Bosqueje la gráfica de la función  $f(x) = 1 - 2(x - 3)^2$ .

**Solución** Comenzando con la gráfica  $y = x^2$ , se desplaza primero a la derecha 3 unidades para obtener la gráfica de  $y = (x - 3)^2$ . Luego se refleja en el eje  $x$  y se alarga por un factor de 2 para obtener la gráfica de  $y = -2(x - 3)^2$ . Por último, se desplaza 1 unidad hacia arriba para obtener la gráfica de  $f(x) = 1 - 2(x - 3)^2$  mostrada en la figura 8.

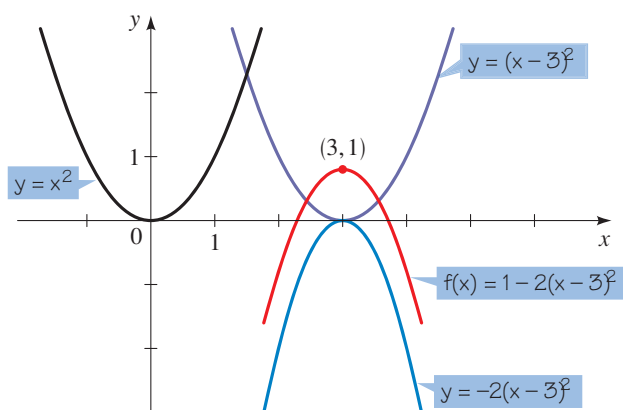


Figura 8

### Alargamiento y estiramiento horizontal

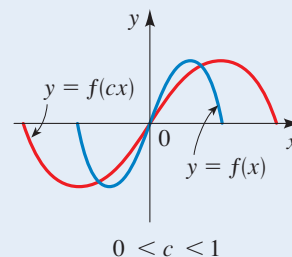
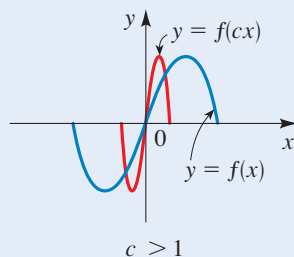
Ahora abordaremos el acortamiento y alargamiento horizontal de gráficas. Si se conoce la gráfica de  $y = f(x)$ , entonces ¿cómo se relaciona la gráfica de  $y = f(cx)$  con ésta? La coordenada  $y$  de  $y = f(cx)$  en  $x$  es la misma que la coordenada  $y$  de  $y = f(x)$  en  $cx$ . Así, las coordenadas  $x$  en la gráfica de  $y = f(x)$  corresponde a las coordenadas  $x$  en la gráfica de  $y = f(cx)$  multiplicadas por  $c$ . Considerado de otro modo, se puede observar que las coordenadas  $x$  en la gráfica de  $y = f(cx)$  son las coordenadas  $x$  en la gráfica de  $y = f(x)$  multiplicada por  $1/c$ . En otras palabras, para cambiar la gráfica de  $y = f(x)$  a la gráfica de  $y = f(cx)$ , se debe acortar (o alargar) la gráfica horizontalmente por un factor de  $1/c$ , como se resume en el cuadro siguiente.

#### Acortamiento y alargamiento horizontal de gráficas

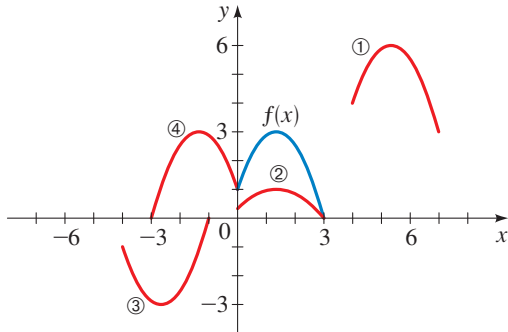
La gráfica de  $y = f(cx)$ :

Si  $c > 1$ , acorte la gráfica de  $y = f(x)$  horizontalmente por un factor de  $1/c$ .

Si  $0 < c < 1$ , alargue la gráfica de  $y = f(x)$  horizontalmente por un factor de  $1/c$ .

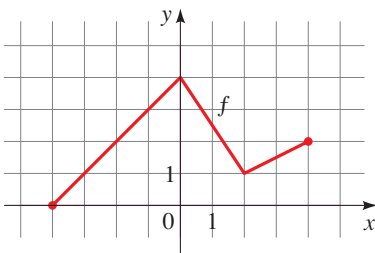


18. a)  $y = \frac{1}{3}f(x)$                       b)  $y = -f(x + 4)$   
 c)  $y = f(x - 4) + 3$                 d)  $y = f(-x)$



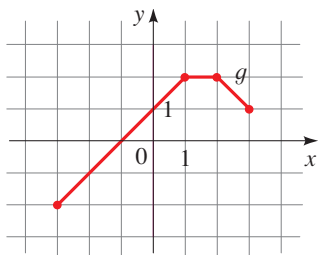
19. Se da la gráfica de  $f$ . Bosqueje las gráficas de las siguientes funciones.

- a)  $y = f(x - 2)$                       b)  $y = f(x) - 2$   
 c)  $y = 2f(x)$                         d)  $y = -f(x) + 3$   
 e)  $y = f(-x)$                         f)  $y = \frac{1}{2}f(x - 1)$



20. Se da la gráfica de  $g$ . Bosqueje las gráficas de las siguientes funciones.

- a)  $y = g(x + 1)$                       b)  $y = -g(x + 1)$   
 c)  $y = g(x - 2)$                       d)  $y = g(x) - 2$   
 e)  $y = -g(x) + 2$                       f)  $y = 2g(x)$



21. a) Bosqueje la gráfica de  $f(x) = \frac{1}{x}$  mediante la graficación de los puntos.

b) Use la gráfica de  $f$  para trazar las gráficas de las siguientes funciones.

- i)  $y = -\frac{1}{x}$                               ii)  $y = \frac{1}{x - 1}$   
 iii)  $y = \frac{2}{x + 2}$                         iv)  $y = 1 + \frac{1}{x - 3}$

22. a) Bosqueje la gráfica de  $g(x) = \sqrt[3]{x}$  graficando los puntos.

b) Use la gráfica de  $g$  para trazar las gráficas de las siguientes funciones.

- i)  $y = \sqrt[3]{x - 2}$                       ii)  $y = \sqrt[3]{x + 2} + 2$   
 iii)  $y = 1 - \sqrt[3]{x}$                       iv)  $y = 2\sqrt[3]{x}$

23–26 ■ Explique cómo se obtiene la gráfica de  $g$  a partir de la gráfica de  $f$ .

23. a)  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = (x + 2)^2$   
 b)  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = x^2 + 2$

24. a)  $f(x) = x^3$ ,  $g(x) = (x - 4)^3$   
 b)  $f(x) = x^3$ ,  $g(x) = x^3 - 4$

25. a)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(x) = 2\sqrt{x}$   
 b)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x - 2}$

26. a)  $f(x) = |x|$ ,  $g(x) = 3|x| + 1$   
 b)  $f(x) = |x|$ ,  $g(x) = -|x + 1|$

27–32 ■ Se da una función  $f$  y se aplican a su gráfica las transformaciones indicadas (en el orden dado). Escriba la ecuación para la gráfica transformada final.

27.  $f(x) = x^2$ ; desplace hacia arriba 3 unidades y 2 unidades a la derecha.  
 28.  $f(x) = x^3$ ; desplace hacia abajo 1 unidad y 4 unidades a la izquierda.  
 29.  $f(x) = \sqrt{x}$ ; desplace 3 unidades a la izquierda, alargue verticalmente por un factor de 5 y refleje en el eje  $x$ .  
 30.  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ; refleje en el eje  $y$ , acorte verticalmente por un factor de  $\frac{1}{2}$ , y desplace hacia arriba  $\frac{3}{5}$  unidades.  
 31.  $f(x) = |x|$ ; desplace a la derecha  $\frac{1}{2}$  unidad, acorte verticalmente por un factor de 0.1 y desplace hacia abajo 2 unidades.  
 32.  $f(x) = |x|$ ; desplace a la izquierda 1 unidad, alargue verticalmente por un factor de 3 y desplace hacia arriba 10 unidades.

33–48 ■ Bosqueje la gráfica de la función, no mediante la graficación de puntos, sino iniciando con la gráfica de una función estándar y aplicando transformaciones.

33.  $f(x) = (x - 2)^2$                       34.  $f(x) = (x + 7)^2$

35.  $f(x) = -(x + 1)^2$                       36.  $f(x) = 1 - x^2$

37.  $f(x) = x^3 + 2$                         38.  $f(x) = -x^3$

39.  $y = 1 + \sqrt{x}$                         40.  $y = 2 - \sqrt{x + 1}$

41.  $y = \frac{1}{2}\sqrt{x + 4} - 3$                       42.  $y = 3 - 2(x - 1)^2$

43.  $y = 5 + (x + 3)^2$                       44.  $y = \frac{1}{3}x^3 - 1$

45.  $y = |x| - 1$                         46.  $y = |x - 1|$

47.  $y = |x + 2| + 2$                       48.  $y = 2 - |x|$