# Ecuaciones electromagnéticas

manuel fernández guasti

17 de enero de 2007

## 1. ecuaciones de Maxwell

Comencemos con las ecuaciones de Maxwell para un medio arbitrario (unidades del SI)

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{2}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \tag{3}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{4}$$

donde $\mathbf{D}$ es el desplazamiento eléctrico, $\mathbf{B}$ el desplazamiento magnético, $\mathbf{H}$ el campo magnético y $\mathbf{E}$ el campo eléctrico. En la ausencia de cargas libres $\rho = 0$ pero permitiendo la existencia de corrientes, las ecuaciones anteriores devienen

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \tag{5}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \tag{6}$$

donde las ecuaciones 2 y 4 permanecen inalteradas.

### 1.1. relaciones constitutivas

Establecen la relación entre los campos y los desplazamientos. La permitividad y permeabilidad son:

1. independientes del campo para medios lineales o campos con amplitud pequeña
2. escalares para medios isotrópicos
3. independientes del espacio para medios homogéneos
4. independientes del tiempo para medios no dispersivos
5. cantidades puramente reales para medios sin abosorción

Consideremos un medio isotrópico:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_t \left(\mathbf{r}, t, \mathbf{E}\right) \mathbf{E}.$$

De la ecuación (5), se obtiene:

$$\nabla \cdot \left(\varepsilon_t \mathbf{E}\right) = \varepsilon_t \nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \nabla \varepsilon_t = 0 \quad \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_t} \mathbf{E} \cdot \nabla \varepsilon_t = \mathbf{E} \cdot \nabla \ln \varepsilon_t.$$

Un resultado análogo es cierto para la permeabilidad puesto que $\mathbf{B} = \mu_t \mathbf{H}$ y el rotacional de ésta expresión puede reescribirse como:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \left(\mu_t \mathbf{H}\right) = \nabla \mu_t \times \mathbf{H} + \mu_t \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \mu_t \times \mathbf{H} + \mu_t \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Las ecuaciones de Maxwell pueden entonces combinarse para obtener:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \nabla \left(\mathbf{E} \cdot \nabla \ln \varepsilon_t\right) = \frac{\partial \left(\nabla \mu_t \times \mathbf{H}\right)}{\partial t} + \frac{\partial \left(\mu_t \frac{\partial \varepsilon_t \mathbf{E}}{\partial t}\right)}{\partial t}.$$

## 1.2. características del medio

Si el medio es magnéticamente homogéneo, independiente del tiempo y el campo, el gradiente de la permeabilidad y su derivada temporal son cero

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \nabla \left(\mathbf{E} \cdot \nabla \ln \varepsilon_t\right) = \mu_t \frac{\partial^2 \left(\varepsilon_t \mathbf{E}\right)}{\partial t^2},$$

para un medio no magnético la permeabilidad es aquella del vacío$\mu_t = \mu_0$.

Si la permitividad es independiente del tiempo, se obtiene

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \nabla \left(\mathbf{E} \cdot \nabla \ln \varepsilon_t\right) = \mu_t \varepsilon_t \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Para un medio homogéneo

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_t \varepsilon_t \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \tag{7}$$

se obtiene la ecuación de onda.