Cargas puntuales en movimiento

manuel fernández guasti

8 de agosto de 2009

1. potenciales retardados

Se debe evaluar el campo o los potenciales tomando en cuenta el tiempo de retardo de la distancia que deben viajar de la fuente al punto de observación

$$t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}. \tag{1}$$

Los *potenciales retardados* se obtienen de los resultados electrostáticos pero evaluados en el tiempo retardado

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \tag{2}$$

y

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mu \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'. \tag{3}$$

Éstos se usan para calcular los campos de partículas cargadas en movimiento. Se puede demostrar que éstas soluciones satisfacen la ecuación de onda inhomogénea.

El *principio de causalidad* establece que un acontecimiento en el tiempo t no debe producir efectos para tiempos menores (anteriores) que t.

2. potenciales de Liénard-Wiechert

Los potenciales de Liénard-Wiechert son los potenciales escalar y vectorial producidos por una carga puntual en movimiento. La carga puntual se puede describir por una delta de dirac

$$\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c) = e\delta(t' - t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)$$

donde se ha escrito explícitamente que la variable $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_e$

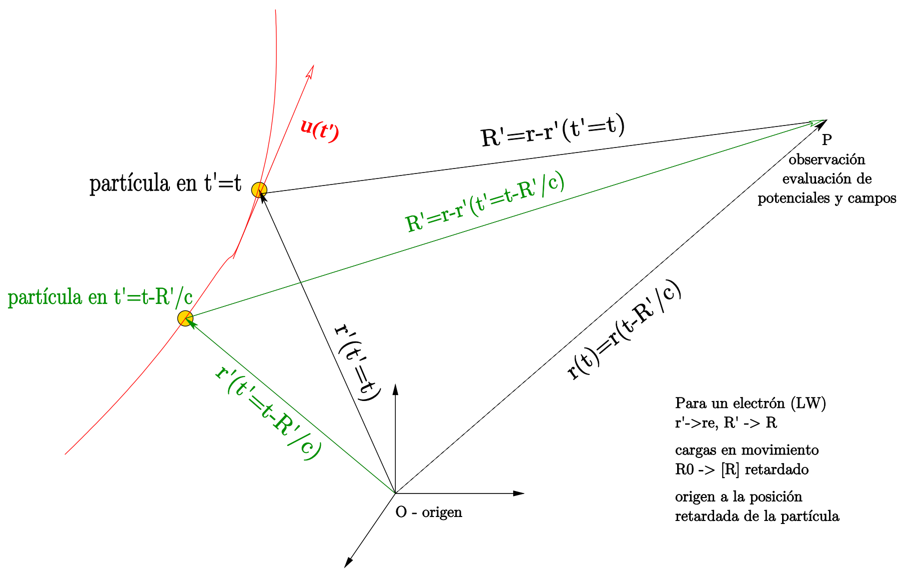

Figura 1: trayectoria de partícula cargada, origen de coordenadas y punto de observación

Para evaluar la integral en términos de la variable de la delta $t_\delta = t' - t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ y el diferencial es

$$\frac{dt_\delta}{dt'} = 1 - \frac{1}{c}\frac{d}{dt'}\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e\left(t'\right)\right|, \tag{4}$$

la derivada de la distancia ente la carga y el observador es

$$\frac{d}{dt'}\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e\left(t'\right)\right| = \nabla_e\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e\left(t'\right)\right| \cdot \frac{d\mathbf{r}_e}{dt'}$$

donde el gradiente con respecto a las coordenadas de la carga se puede escribir como

$$\nabla_e\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e\left(t'\right)\right| = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_e}{\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e\right|}.$$

Con éstos resultados, si además se define

$$\overrightarrow{\beta} \equiv \frac{1}{c}\frac{d\mathbf{r}_e}{dt'}, \qquad \mathbf{R} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}_e \tag{5}$$

se puede escribir

$$\frac{dt_\delta}{dt'} = 1 - \frac{\overrightarrow{\beta} \cdot \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|},$$

de manera que la transformación es

$$dt' = \frac{|\mathbf{R}|}{|\mathbf{R}| - \overrightarrow{\beta} \cdot \mathbf{R}} dt_\delta.$$

Si se inserta éste resultado en la ecuación para el potencial escalar (2) se obtiene

$$\phi\left(\mathbf{r}, t\right) = \frac{1}{\varepsilon}\frac{e}{|\mathbf{R}| - \overrightarrow{\beta} \cdot \mathbf{R}}. \tag{6}$$

Para el potencial vectorial, puesto que $\mathbf{J} = \rho c\overrightarrow{\beta}$, el potencial vectorial es

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{r}, t\right) = \mu c\frac{e\overrightarrow{\beta}}{|\mathbf{R}| - \overrightarrow{\beta} \cdot \mathbf{R}}. \tag{7}$$

Si se define

$$\hat{\mathbf{n}} \equiv \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|}, \qquad R \equiv |\mathbf{R}|$$

se pueden reescribir los potenciales como

$$\phi\left(\mathbf{r}, t\right) = \frac{1}{\varepsilon R}\frac{e}{1 - \overrightarrow{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}}}. \tag{8}$$

Para el potencial vectorial, puesto que $\mathbf{J} = \rho c\overrightarrow{\beta}$, el potencial vectorial es

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{r}, t\right) = \frac{\mu c}{R}\frac{e\overrightarrow{\beta}}{1 - \overrightarrow{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}}}. \tag{9}$$

3. Campos retardados

El campo eléctrico es entonces

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\left(\frac{1}{\varepsilon R}\frac{e}{1-\overrightarrow{\beta}\cdot\hat{\mathbf{n}}}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mu c}{R}\frac{e\overrightarrow{\beta}}{1-\overrightarrow{\beta}\cdot\hat{\mathbf{n}}}\right).$$

Evaluemos los distintos términos para obtener

$$\mathbf{E} = e\left[\frac{\left(\hat{\mathbf{n}}-\overrightarrow{\beta}\right)\left(1-\beta^2\right)}{\left(1-\overrightarrow{\beta}\cdot\hat{\mathbf{n}}\right)^3 R^2}\right]_{ret} + \frac{e}{c}\left[\frac{\hat{\mathbf{n}}\times\left\{\left(\hat{\mathbf{n}}-\overrightarrow{\beta}\right)\times\dot{\overrightarrow{\beta}}\right\}}{\left(1-\overrightarrow{\beta}\cdot\hat{\mathbf{n}}\right)^3 R}\right]_{ret}. \tag{10}$$

Mientras que el campo magnético es $\mathbf{B} = [\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E}]_{ret}$ que deviene en

$$\mathbf{B} = e\left[\frac{\left(\overrightarrow{\beta}\times\hat{\mathbf{n}}\right)\left(1-\beta^2\right)}{\left(1-\overrightarrow{\beta}\cdot\hat{\mathbf{n}}\right)^3 R^2}\right]_{ret} + \frac{e}{c}\left[\frac{\hat{\mathbf{n}}\times\left(\hat{\mathbf{n}}\times\left\{\left(\hat{\mathbf{n}}-\overrightarrow{\beta}\right)\times\dot{\overrightarrow{\beta}}\right\}\right)}{\left(1-\overrightarrow{\beta}\cdot\hat{\mathbf{n}}\right)^3 R}\right]_{ret}.$$

El término acelerado en el numerador del campo eléctrico es $\hat{\mathbf{n}}\times\left\{\left(\hat{\mathbf{n}}-\overrightarrow{\beta}\right)\times\dot{\overrightarrow{\beta}}\right\} = \hat{\mathbf{n}}\times\left(\hat{\mathbf{n}}\times\dot{\overrightarrow{\beta}}\right) - \hat{\mathbf{n}}\times\left(\overrightarrow{\beta}\times\dot{\overrightarrow{\beta}}\right)$, puesto que $\hat{\mathbf{n}}\times\left(\hat{\mathbf{n}}\times\dot{\overrightarrow{\beta}}\right) = \left(\hat{\mathbf{n}}\cdot\dot{\overrightarrow{\beta}}\right)\hat{\mathbf{n}} - \dot{\overrightarrow{\beta}}$ y $\hat{\mathbf{n}}\times\left(\overrightarrow{\beta}\times\dot{\overrightarrow{\beta}}\right) = \left(\hat{\mathbf{n}}\cdot\dot{\overrightarrow{\beta}}\right)\overrightarrow{\beta} - \left(\hat{\mathbf{n}}\cdot\overrightarrow{\beta}\right)\dot{\overrightarrow{\beta}}$, entonces

$$\hat{\mathbf{n}}\times\left\{\left(\hat{\mathbf{n}}-\overrightarrow{\beta}\right)\times\dot{\overrightarrow{\beta}}\right\} = \left(\hat{\mathbf{n}}\cdot\dot{\overrightarrow{\beta}}\right)\left(\hat{\mathbf{n}}-\overrightarrow{\beta}\right) - \left(1-\overrightarrow{\beta}\cdot\hat{\mathbf{n}}\right)\dot{\overrightarrow{\beta}}.$$

4. Análisis de resultados

- Los campos tienen un término dependiente de la velocidad de la partícula y otro dependiente de su aceleración.
- El campo magnético de una carga puntual siempre es perpendicular al campo eléctrico.
- El campo eléctrico para velocidades y aceleraciones despreciables se encuentra en la dirección radial como en un campo del Coulomb.
- El campo magnético es cero para velocidades y aceleraciones despreciables.
- En campo lejano las contribuciones provienen del campo de aceleración

Los campos de velocidad son proporcionales al cuadrado inverso de la distancia $\mathbf{E}_v, \mathbf{B}_v \propto 1/R^2$, por otro lado, los campos de aceleración son proporcionales al inverso de la distancia $\mathbf{E}_a, \mathbf{B}_a \propto 1/R$. Por lo tanto, habrá tres términos para el vector de Poynting

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu}\mathbf{E}\times\mathbf{B}, \quad \mathbf{S}_{vv} \propto \frac{1}{R^4}, \quad \mathbf{S}_{va}, \mathbf{S}_{av} \propto \frac{1}{R^3}, \quad \mathbf{S}_{aa} \propto \frac{1}{R^2}.$$

Si rodeamos la carga con una esfera de radio muy grande, e integramos el flujo del vector de Poynting sobre su área, la única contribución que no será cero a grandes distancias es $\mathbf{S}_{aa}$. Por lo tanto, considerando la interacción de los campos eléctrico y magnético, los campos de aceleración constituyen la *radiación* que emite la carga. Concluimos entonces que sólo las cargas aceleradas pueden radiar. La radiación ocurre si $\vec{a}$ es positiva o negativa, la energía también será radiada en una desaceleración (¿simetría temporal?).

Si $\vec{v}$ se interpreta como la velocidad relativa entre una partícula y un observador, hay un marco de referencia en el cual la partícula está en reposo y el observador se encuentra en movimiento uniforme. Éste no observará radiación, pues la partícula no se mueve con respecto a él.