Campos de dipolo - Jackson

manuel fernández guasti

11 de abril de 2007

1. distribución de carga

La densidad de carga está distribuida como $\exp\left(ik\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_\rho\right|\right)$. Si se considera la distancia de observación $r \equiv |\mathbf{r}|$ mucho mayor que las dimensiones de la distribución de carga $r \gg d$,

$$\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_\rho\right| \approx r - \hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}_\rho$$

y la exponencial puede escribirse como

$$\exp\left(ik\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_\rho\right|\right) \approx \exp\left(ikr\right)\exp\left(-ik\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}_\rho\right).$$

Si la distribución de carga es mucho menor que la longitud de onda $d \ll \lambda$, entonces $dk \ll 1$ y segunda exponencial puede aproximarse como

$$\exp\left(-ik\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}_\rho\right) \approx 1 - ik\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}_\rho + ...$$

En primera aproximación

$$\frac{\exp\left(ik\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_\rho\right|\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_\rho\right|} \approx \frac{\exp\left(ikr\right)}{r} \tag{1}$$

Dependencia temporal sinusoidal

$$\mathbf{J}\left(\mathbf{r}',t'\right) = \mathbf{J}\left(\mathbf{r}'\right)e^{-i\omega t'} \tag{2}$$

2. potenciales

El potencial vectorial producido por una corriente es

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{r},t\right) = \mu\int_V\int\frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{r}',t'\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\delta\left(t'-t+\frac{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}{c}\right)dt'dv'. \tag{3}$$

donde se ha introducido el tiempo retardado. Se sustituye la dependencia temporal (2) con $-t' = -t + \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}$ para obtener

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{r},t\right) = \mu\int_V\frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{r}'\right)e^{ik\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}e^{-i\omega t}}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}dv'.$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \mu \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', -t + |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv'. \tag{4}$$

(Jackson utiliza un factor de $1/4\pi$). Se separa la dependencia temporal $\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \mathbf{A}(\mathbf{r})\exp(-i\omega t)$ y haciendo la aproximación del dipolo eléctrico

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv' \approx \frac{\mu e^{ikr}}{r} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') dv'.$$

Si se integra por partes

$$\int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') dv' = -\int_V \mathbf{r}' [\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')] dv' = \int_V \mathbf{r}' \left[\frac{\partial \rho}{\partial t}\right] dv',$$

puesto que $\nabla' \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t'} = 0$. Se define el momento dipolar como

$$\mathbf{p} = \int_V \mathbf{r}' \rho dv' \tag{5}$$

El potencial vectorial es entonces$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \left(-i\omega\mu e^{ikr}/r\right) \mathbf{p}$ y puesto que $1/c = \sqrt{\mu\varepsilon}$ y $\omega/c = k$,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = -ik\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{p} \tag{6}$$

3. campo magnético

El campo magnético está dado por

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -ik\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \nabla \times \left\{\frac{e^{ikr}}{r}\mathbf{p}\right\}$$

$$\mathbf{B} = -ik\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(\nabla \frac{e^{ikr}}{r} \times \mathbf{p} + \frac{e^{ikr}}{r} \nabla \times \mathbf{p}\right)$$

y el gradiente del escalar es

$$\nabla \frac{e^{ikr}}{r} = \left(-\frac{e^{ikr}}{r^2} + \frac{ike^{ikr}}{r}\right) \nabla r = \frac{e^{ikr}}{r} \left(ik - \frac{1}{r}\right) \hat{\mathbf{n}}$$

pero $\nabla r = \hat{\mathbf{n}}$ y $\nabla \times \mathbf{p} = 0$ puesto que el momento dipolar ya no depende de las coordenadas, de manera que

$$\mathbf{B} = -ik\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{e^{ikr}}{r} \left(ik - \frac{1}{r}\right) \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{p}$$

$$\mathbf{B} = \frac{k^2 e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr}\right) \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{p} \tag{7}$$

4. campo eléctrico

El campo eléctrico se puede obtener de los potenciales o del campo magnético

$$\mathbf{E} = \frac{i}{k}\nabla \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{E} = ik\nabla\left[\frac{e^{ikr}}{r}\left(1-\frac{1}{ikr}\right)\right]\times(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{p}) + ik\left[\frac{e^{ikr}}{r}\left(1-\frac{1}{ikr}\right)\right]\nabla\times(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{p})$$

El término gradiente es

$$\nabla\left[\frac{e^{ikr}}{r}\left(1-\frac{1}{ikr}\right)\right] = \left(1-\frac{1}{ikr}\right)\nabla\left[\frac{e^{ikr}}{r}\right] + \frac{e^{ikr}}{r}\nabla\left[\left(1-\frac{1}{ikr}\right)\right]$$

$$= \left\{\left(1-\frac{1}{ikr}\right)\left(ik-\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{ikr^2}\right\}\frac{e^{ikr}}{r}\hat{\mathbf{n}} = \left\{\left(ik-\frac{2}{r}+\frac{1}{ikr^2}\right)+\frac{1}{ikr^2}\right\}\frac{e^{ikr}}{r}\hat{\mathbf{n}}$$

$$\nabla\left[\frac{e^{ikr}}{r}\left(1-\frac{1}{ikr}\right)\right] = \left(ik-\frac{2}{r}+\frac{2}{ikr^2}\right)\frac{e^{ikr}}{r}\hat{\mathbf{n}} \tag{8}$$

de manera que

$$\mathbf{E} = \left(k^2-\frac{2ik}{r}+\frac{2}{r^2}\right)\frac{e^{ikr}}{r}\hat{\mathbf{n}}\times(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{p}) + \left[\frac{e^{ikr}}{r}\left(ik-\frac{1}{r}\right)\right]\nabla\times(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{p})$$

Se separa el término de radiación

$$\mathbf{E}_{rad} = k^2\frac{e^{ikr}}{r}\hat{\mathbf{n}}\times(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{p})$$

Los términos restantes son

$$\mathbf{E}_{\neq rad} = \frac{e^{ikr}}{r}\left\{\left(-\frac{2ik}{r}+\frac{2}{r^2}\right)\hat{\mathbf{n}}\times(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{p}) + \left(ik-\frac{1}{r}\right)\nabla\times(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{p})\right\}$$

Se reescribe el triple producto cruz con la identidad $\hat{\mathbf{n}}\times(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{p}) = (\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{p})\,\hat{\mathbf{n}} - \mathbf{p}$ y el rotacional del podructo cruz con la identidad $\nabla\times(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{p}) = \hat{\mathbf{n}}\,(\nabla\cdot\mathbf{p}) - \mathbf{p}\,(\nabla\cdot\hat{\mathbf{n}}) + (\mathbf{p}\cdot\nabla)\,\hat{\mathbf{n}} - (\hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla)\,\mathbf{p}$; puesto que $\nabla\cdot\hat{\mathbf{n}} = \frac{2}{r}$ y $\nabla\cdot\mathbf{r} = 3$ y los operadores espaciales sobre el momento dipolar son cero, entonces

$$\nabla\times(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{p}) = -\frac{2\mathbf{p}}{r} + (\mathbf{p}\cdot\nabla)\,\hat{\mathbf{n}} = -\frac{2\mathbf{p}}{r} + \frac{1}{r}\left[\mathbf{p} - \hat{\mathbf{n}}\,(\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{n}})\right].$$

Nótese que $(\mathbf{p}\cdot\nabla)\,\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{r}\left[\mathbf{p}-\hat{\mathbf{n}}\,(\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{n}})\right] \equiv \frac{\mathbf{p}_\perp}{r}$, el vector $\mathbf{p}_\perp$ representa la parte perpendicular a $\hat{\mathbf{n}}$ del momento dipolar.

$$\nabla\times(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{p}) = \hat{\mathbf{n}}\,(\nabla\cdot\mathbf{p}) - (\hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla)\,\mathbf{p} - \frac{1}{r}\left[\mathbf{p}+\hat{\mathbf{n}}\,(\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{n}})\right]$$

$$\mathbf{E}_{\neq rad} = \frac{e^{ikr}}{r}\left\{\left(-\frac{2ik}{r}+\frac{2}{r^2}\right)\left[(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{p})\,\hat{\mathbf{n}}-\mathbf{p}\right] - \left(ik-\frac{1}{r}\right)\frac{1}{r}\left[\hat{\mathbf{n}}\,(\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{n}})+\mathbf{p}\right]\right\}$$

$$\mathbf{E}_{\neq rad} = \frac{e^{ikr}}{r}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r}\right)\{2\left[(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{p})\,\hat{\mathbf{n}} - \mathbf{p}\right] + \left[\hat{\mathbf{n}}\,(\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{n}}) + \mathbf{p}\right]\}$$

$$\mathbf{E}_{\neq rad} = \frac{e^{ikr}}{r}\left\{\left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r}\right)\left[3\,(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{p})\,\hat{\mathbf{n}} - \mathbf{p}\right]\right\}$$

de manera que el campo eléctico total es

$$\mathbf{E} = k^2\frac{e^{ikr}}{r}\hat{\mathbf{n}}\times(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{p}) + \frac{e^{ikr}}{r}\left\{\left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r}\right)\left[3\,(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{p})\,\hat{\mathbf{n}} - \mathbf{p}\right]\right\} \tag{9}$$