Campos retardados - límites

manuel fernández guasti

14 de mayo de 2007

1. Campos retardados

El campo eléctrico en general es

$$\mathbf{E}=\frac{e}{\varepsilon}\left[\frac{\left(\hat{\mathbf{n}}-\overrightarrow{\beta}\right)\left(1-\beta^{2}\right)}{\left(1-\vec{\beta}\cdot\hat{\mathbf{n}}\right)^{3}R^{2}}\right]_{ret}+\frac{e}{\varepsilon c}\left[\frac{\hat{\mathbf{n}}\times\left\{\left(\hat{\mathbf{n}}-\vec{\beta}\right)\times\vec{\alpha}\right\}}{\left(1-\vec{\beta}\cdot\hat{\mathbf{n}}\right)^{3}R}\right]_{ret}. \tag{1}$$

En términos de los productos punto es

$$\mathbf{E}=\frac{e}{\varepsilon}\left[\frac{\left(\hat{\mathbf{n}}-\vec{\beta}\right)\left(1-\beta^{2}\right)}{\left(1-\vec{\beta}\cdot\hat{\mathbf{n}}\right)^{3}R^{2}}\right]_{ret}+\frac{e}{\varepsilon c}\left[\frac{\left(\vec{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{n}}\right)\left(\hat{\mathbf{n}}-\vec{\beta}\right)-\left(1-\vec{\beta}\cdot\hat{\mathbf{n}}\right)\vec{\alpha}}{\left(1-\vec{\beta}\cdot\hat{\mathbf{n}}\right)^{3}R}\right]_{ret}. \tag{2}$$

La relación entre el campo magnético y eléctrico es

$$\mathbf{B}=\frac{1}{c}\left[\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E}\right]_{ret}.$$

2. términos en E de velocidad

Se define el vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$ en términos de los ángulos

$$\hat{\mathbf{n}}=\cos\theta\cos\phi\hat{i}+\sin\theta\cos\phi\hat{j}+\sin\phi\hat{k} \tag{3}$$

$$\mathbf{E}|_{vel}=\frac{e}{\varepsilon R^{2}}\frac{\left(1-\beta^{2}\right)\left(\hat{\mathbf{n}}-\overrightarrow{\beta}\right)}{\left(1-\overrightarrow{\beta}\cdot\hat{\mathbf{n}}\right)^{3}} \tag{4}$$

Para velocidades muy pequeñas se reproduce el resultado de Coulomb

$$\mathbf{E}|_{lim\ v\to 0}=\frac{e}{\varepsilon R^{2}}\hat{\mathbf{n}}.$$

Si escogemos la velocidad en la dirección $\hat{j}$ y $\hat{\mathbf{n}}$ en el plano $\hat{i}, \hat{j}$

$$\mathbf{E}_{vel-y} = \frac{e}{\varepsilon R^2} \frac{\left(1-\beta_y^2\right)\left(\cos\theta \hat{i} + \left(\sin\theta - \beta_y\right)\hat{j}\right)}{\left(1-\beta_y \sin\theta\right)^3} \tag{5}$$

$$\left|\hat{\mathbf{n}} - \overrightarrow{\beta}\right| = \sqrt{\cos^2\theta + \left(\sin\theta - \beta_y\right)^2},$$

la magnitud del campo eléctrico que involucra solamente velocidades es entonces

$$\left|\mathbf{E}_{vel-y}\right| = \frac{e}{\varepsilon R^2} \frac{\left(1-\beta_y^2\right)\sqrt{\cos^2\theta + \left(\sin\theta - \beta_y\right)^2}}{\left(1-\beta_y \sin\theta\right)^3} \tag{6}$$

3. términos en E de aceleración

$$\mathbf{E}_{acel} = \frac{e}{\varepsilon c}\left[\frac{\left(\vec{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{n}}\right)\left(\hat{\mathbf{n}}-\vec{\beta}\right) - \left(1-\vec{\beta}\cdot\hat{\mathbf{n}}\right)\vec{\alpha}}{\left(1-\vec{\beta}\cdot\hat{\mathbf{n}}\right)^3 R}\right]_{ret}. \tag{7}$$

- Si la aceleración es cero, el campo de radiación es nulo.
- El campo de radiación es perpendicular a $\hat{\mathbf{n}}$, la dirección de observación.

Si se factoriza el término de aceleración y se introduce un vector de aceleración unitario

$$\dot{\overrightarrow{\beta}} \equiv \overrightarrow{\alpha}, \quad \frac{\overrightarrow{\alpha}}{\alpha_0} \equiv \hat{\alpha},$$

el campo es

$$\mathbf{E}_{acel} = \frac{e}{\varepsilon c R} \frac{\alpha_0\left\{\left(\hat{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{n}}\right)\left(\hat{\mathbf{n}}-\overrightarrow{\beta}\right) - \left(1-\overrightarrow{\beta}\cdot\hat{\mathbf{n}}\right)\hat{\alpha}\right\}}{\left(1-\overrightarrow{\beta}\cdot\hat{\mathbf{n}}\right)^3}. \tag{8}$$

3.1. términos de aceleración E - velocidad nula

En el límite de velocidad cero

$$\mathbf{E}_{acel}\left(\beta=0\right) = \frac{e}{\varepsilon c R}\alpha_0\left\{\left(\hat{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{n}}\right)\hat{\mathbf{n}} - \hat{\alpha}\right\}$$

Nótese que en general, la relación

$$\hat{\alpha} - \underbrace{\left(\hat{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{n}}\right)\hat{\mathbf{n}}} = \hat{\alpha} \perp \hat{\mathbf{n}} \equiv \hat{\mathbf{n}}_{\perp} \tag{9}$$

representa el vector perpendicular a $\hat{\mathbf{n}}$. Si escogemos la aceleración en la dirección $\hat{\imath}$ y $\hat{\mathbf{n}}$ en el plano $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{acel-x}(\beta = 0) &= \frac{e\alpha_x}{\varepsilon cR}\left\{\cos\theta\left(\cos\theta\hat{\imath} + \sin\theta\hat{\jmath}\right) - \hat{\imath}\right\} \\ &= \frac{e\alpha_x}{\varepsilon cR}\left\{\left(\cos^2\theta - 1\right)\hat{\imath} + \sin\theta\cos\theta\hat{\jmath}\right\}\end{aligned}$$

de manera que

$$\mathbf{E}_{acel-x}(\beta = 0) = \frac{e\alpha_x}{\varepsilon cR}\sin\theta\left\{-\sin\theta\hat{\imath} + \cos\theta\hat{\jmath}\right\} \tag{10}$$

La magnitud del campo eléctrico debido a dicha aceleración es

$$\left|\mathbf{E}_{acel-x}(\beta = 0)\right| = \frac{e\alpha_x}{\varepsilon cR}\sqrt{\sin^2\theta}, \tag{11}$$

ésta es la amplitud que corresponde al resultado de Larmor.

3.2. términos de aceleración E - velocidad colineal

Para velocidad y aceleración colineales $\overrightarrow{\beta} = \beta_x\hat{\alpha}$, de (8)

$$\mathbf{E}_{acel-x}(\beta\ colineal) = \frac{e}{\varepsilon cR}\frac{\alpha_x\left\{(\hat{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{n}})(\hat{\mathbf{n}} - \beta_x\hat{\alpha}) - (1 - \beta_x\hat{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{n}})\hat{\alpha}\right\}}{(1 - \beta_x\hat{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{n}})^3},$$

que puede reescribirse como

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{acel-x}(\beta\ colineal) &= \frac{e}{\varepsilon cR}\frac{\alpha_x\left\{(\hat{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}} - \hat{\alpha}\right\}}{(1 - \beta_x\hat{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{n}})^3} \\ &= \frac{e}{\varepsilon cR}\frac{\alpha_x\left\{\hat{\mathbf{n}}\times(\hat{\mathbf{n}}\times\hat{\alpha})\right\}}{(1 - \beta_x\hat{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{n}})^3}.\end{aligned} \tag{12}$$

Éste resultado también puede obtenerse de (1). Nótese que la velocidad no aparece en el numerador en el caso colineal. La magnitud del campo es entonces

$$\left|\mathbf{E}_{acel-x}(\beta\ colineal)\right| = \frac{e}{\varepsilon cR}\frac{\alpha_x\left|\sin\theta\right|}{(1 - \beta_x\cos\theta)^3}. \tag{13}$$

3.2.1. sinusoidal lineal

Ahora bien, consideremos una dependencia temporal sinusoidal en los campos

$$\beta_x = \beta_{x0}\cos\omega t, \qquad \alpha_x = -\alpha_{x0}\sin\omega t.$$

El campo de aceleración (12) es entonces

$$\mathbf{E}_{acel-x}(\beta_{col}, \omega t) = \frac{e}{\varepsilon cR}\frac{-\alpha_{x0}\sin\omega t\left\{\hat{\mathbf{n}}\times(\hat{\mathbf{n}}\times\hat{\alpha})\right\}}{(1 - \beta_{x0}\cos\omega t\cos\theta)^3},$$

y en componentes

$$\mathbf{E}_{acel-x}\left(\beta_{col},\omega t\right)=\frac{e}{\varepsilon cR}\frac{\alpha_{x0}\sin\omega t\sin\theta\left\{-\sin\theta\hat{i}+\cos\theta\hat{j}\right\}}{\left(1-\beta_{x0}\cos\omega t\cos\theta\right)^{3}}.$$

Su magnitud es

$$\mathbf{E}_{acel-x}\left(\beta_{col},\omega t\right)=\frac{e}{\varepsilon cR}\frac{\alpha_{x0}\left|\sin\omega t\sin\theta\right|}{\left(1-\beta_{x0}\cos\omega t\cos\theta\right)^{3}}.$$

El promedio del cuadrado que es proporcional a la potencia

$$\left\langle\mathbf{E}_{acel-x}^{2}\left(\beta_{col},\omega t\right)\right\rangle_{\tau}=\left(\frac{e}{\varepsilon cR}\right)^{2}\alpha_{x0}^{2}\sin^{2}\theta\int_{0}^{\frac{2\pi}{\omega}}\frac{\sin^{2}\omega t}{\left(1-\beta_{x0}\cos\omega t\cos\theta\right)^{6}}dt.$$

en el caso relativista no podemos calcular la integral analíticamente. Mientras que en el caso de velocidad pequeña

$$\left\langle\mathbf{E}_{acel-x}^{2}\left(\beta_{col},\omega t\right)\right\rangle_{\tau}\approx\left(\frac{e}{\varepsilon cR}\right)^{2}\alpha_{x0}^{2}\sin^{2}\theta\int_{0}^{\frac{2\pi}{\omega}}\sin^{2}\omega tdt=\frac{1}{2}\left(\frac{e}{\varepsilon cR}\right)^{2}\alpha_{x0}^{2}.$$

3.2.2. proyección

El vector $\mathbf{E}_{acel-x}$ lo podemos proyectar en la dirección $\hat{\mathbf{n}}_{\perp}$mediante

$$\mathbf{E}_{acel-x}\cdot\hat{\mathbf{n}}_{\perp}$$

donde $(\theta\rightarrow\theta+\pi/2)$ {y phi?}

$$\hat{\mathbf{n}}_{\perp}=-\sin\theta\cos\phi\hat{i}+\cos\theta\cos\phi\hat{j}+\sin\phi\hat{k}\tag{14}$$

3.3. velocidad y aceleración perpendicular

El campo es $\hat{\mathbf{n}}\times\left\{\left(\hat{\mathbf{n}}-\overrightarrow{\beta}\right)\times\dot{\overrightarrow{\beta}}\right\}=\alpha_{0}\hat{\mathbf{n}}\times\left\{\left(\hat{\mathbf{n}}-\overrightarrow{\beta}\right)\times\hat{\alpha}\right\}$,

$$\hat{\mathbf{n}}\times\left\{\left(\hat{\mathbf{n}}-\overrightarrow{\beta}\right)\times\hat{\alpha}\right\}=\hat{\mathbf{n}}\times\left(\hat{\mathbf{n}}\times\hat{\alpha}\right)-\hat{\mathbf{n}}\times\left(\overrightarrow{\beta}\times\hat{\alpha}\right)$$

Si la aceleración está en la dirección *x,* la velocidad en la dirección y y evalauamos el vector normal en el plano x-y

$$\hat{\mathbf{n}}\times\left(\hat{\mathbf{n}}\times\hat{i}\right)-\beta_{y}\hat{\mathbf{n}}\times\left\{\left(\hat{j}\times\hat{i}\right)\right\}=-\sin\theta\hat{\mathbf{n}}\times\hat{k}+\beta_{y}\hat{\mathbf{n}}\times\hat{k}$$

El campo de aceleración es entonces

$$\mathbf{E}_{acel-x}\left(\beta\perp\right)=\frac{e\alpha_{x}}{\varepsilon cR}\frac{\left(\beta_{y}-\sin\theta\right)\hat{\mathbf{n}}\times\hat{k}}{\left(1-\beta_{y}\sin\theta\right)^{3}},$$

donde $\hat{\mathbf{n}}\times\hat{k}=\hat{\mathbf{n}}_{\perp}$.

4. términos de aceleración E en 3D - magnitud

La magnitud cuadrada del término entre corchetes de (7) es

$$\left\{(\vec{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{n}})\left(\hat{\mathbf{n}}-\overrightarrow{\beta}\right)-\left(1-\overrightarrow{\beta}\cdot\hat{\mathbf{n}}\right)\vec{\alpha}\right\}\cdot\left\{(\vec{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{n}})\left(\hat{\mathbf{n}}-\overrightarrow{\beta}\right)-\left(1-\overrightarrow{\beta}\cdot\hat{\mathbf{n}}\right)\vec{\alpha}\right\}$$

$$\left\{(\vec{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{n}})^2\left(1-2\overrightarrow{\beta}\cdot\hat{\mathbf{n}}+\beta^2\right)-2\left(1-\overrightarrow{\beta}\cdot\hat{\mathbf{n}}\right)(\vec{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{n}})\left(\vec{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{n}}-\vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{\beta}\right)+\left(1-\overrightarrow{\beta}\cdot\hat{\mathbf{n}}\right)^2\alpha^2\right\} \tag{15}$$

Mientras que la magnitud del numerador de (4)

$$\left(1-\beta^2\right)\sqrt{(\cos\theta\cos\phi-\beta_x)^2+(\sin\theta\cos\phi-\beta_y)^2+(\sin\phi-\beta_z)^2}$$

4.1. Movimiento circular uniforme

Se factoriza α^2 en (15) y $\vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{\beta}=0$, entonces

$$\alpha^2\left\{(\hat{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{n}})^2\left(1-2\overrightarrow{\beta}\cdot\hat{\mathbf{n}}+\beta^2\right)-2\left(1-\overrightarrow{\beta}\cdot\hat{\mathbf{n}}\right)(\hat{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{n}})^2+\left(1-\overrightarrow{\beta}\cdot\hat{\mathbf{n}}\right)^2\right\}$$

la expresión para el campo eléctrico se puede simplificar a

$$\left|\mathbf{E}|_{acel}\right|=\frac{e}{\varepsilon cR}\frac{\alpha\left\{-(\hat{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{n}})^2\left(1-\beta^2\right)+\left(1-\overrightarrow{\beta}\cdot\hat{\mathbf{n}}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}{\left(1-\overrightarrow{\beta}\cdot\hat{\mathbf{n}}\right)^3}$$

Si los vectores de velocidad y aceleración se encuentran en el plano $\hat{\imath},\hat{\jmath}$ y $\hat{\mathbf{n}}$ en un plano arbirtrario

$$\overrightarrow{\beta}=\beta_x\hat{\imath}+\beta_y\hat{\jmath}=\beta_0\left(\cos\omega t\ \hat{\imath}+\sin\omega t\ \hat{\jmath}\right)$$

$$\dot{\overrightarrow{\beta}}\equiv\overrightarrow{\alpha}=\alpha_x\hat{\imath}+\alpha_y\hat{\jmath}=\alpha_0\left(-\sin\omega t\ \hat{\imath}+\cos\omega t\ \hat{\jmath}\right)$$

de manera que

$$\overrightarrow{\beta}\cdot\hat{\mathbf{n}}=\beta_0\cos\phi\left(\cos\theta\cos\omega t+\sin\theta\sin\omega t\right)$$

$$\overrightarrow{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{n}}=\alpha_0\cos\phi\left(-\cos\theta\sin\omega t+\sin\theta\cos\omega t\right)$$