Medios materiales: conductores

13 de febrero de 2007

1. Relación de Ohm

De la definición de campo eléctrico:

$$q\vec{E} = \vec{F} = m\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \tag{1}$$

y para b cargas obtenemos, puesto que la corriente se define por

$$\vec{J} = \rho\vec{v} = \frac{bq}{V}\vec{v}, \tag{2}$$

la corriente en términos del campo evaluando la derivada de (2) y sustituyendo (1) es

$$\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = b\frac{q^2}{m}\vec{E}. \tag{3}$$

De manera que para un campo eléctrico constante la corriente aumentaría linealmente en el tiempo. Sin embargo se observa que en metales el campo y la corriente son proporcionales.

Consideremos la velocidad del electrón como función del tiempo[1] después de una colisión, integrando de la definición de campo (1), encontramos la velocidad para campo constante:

$m\int\limits_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} \partial\vec{v} = q\int \vec{E}\partial t$, de manera que

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{q}{m}\vec{E}t$$

promediando sobre tiempos cortos pero con un gran número de colisiones

$$\langle\vec{v}\rangle = \langle\vec{v}_0\rangle + \frac{q}{m}\vec{E}\,\langle t\rangle$$

si las colisiones son aleatorias, entonces $\langle\vec{v}_0\rangle = 0$ y permitamos que el tiempo promedio entre colisiones sea $\langle t\rangle = \tau$ (el camino libre medio es ...).

$$\langle\vec{v}\rangle = \frac{q}{m}\vec{E}\tau. \tag{4}$$

[1] Electricity & Magnetism, Bleaney, OUP, (1983), p.65

De manera que si promediamos (2) y se sustituye el valor promedio de la velocidad

$$\vec{J}_{drift} = \frac{bq}{V}\left\langle \vec{v} \right\rangle = \frac{b}{V}\frac{q^2}{m}\tau\vec{E} = \sigma\vec{E}, \tag{5}$$

que es precisamente la ecuación constitutiva de Ohm. σes la conductividad y su inverso es la resistividad.

2. ecuación diferencial para metales

La derivada de la tercera ecuación de Maxwell al sustituir la relación de Ohm para la corriente (5) es

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \varepsilon_b \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Si se sustituye el rotacional de H por $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}$ se obtiene

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon_b \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{6}$$

La solución de onda plana implica una magnitud del vector de onda dada por

$$k^2 = \mu\varepsilon_b\omega^2\left(1 + i\frac{\sigma}{\varepsilon_b\omega}\right) = \mu\varepsilon_b\omega^2 + i\mu\omega\sigma. \tag{7}$$

La parte real e imaginaria del vector de onda $\tilde{k} = k_{re} + ik_{im}$ es

$$k_{re} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(\left(\mu\varepsilon_b\omega^2\right)^2 + \left(\mu\omega\sigma\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \mu\varepsilon_b\omega^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

y

$$k_{im} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(\left(\mu\varepsilon_b\omega^2\right)^2 + \left(\mu\omega\sigma\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} - \mu\varepsilon_b\omega^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

donde el tilde representa variables complejas. Para un conductor perfecto $\sigma \gg \varepsilon_b\omega$,

$$\tilde{k} = \frac{\sqrt{\mu\omega\sigma}}{\sqrt{2}}\left(1 + i\right) = \frac{\left(1 + i\right)}{\delta}$$

donde se define la longitud de penetración (skin depth)

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\omega\sigma}}. \tag{8}$$

El índice de refracción complejo es entonces

$$n = \frac{c}{\omega}\frac{\left(1 + i\right)}{\delta} = \frac{\lambda}{2\pi\delta}\left(1 + i\right)$$

3. interfase metálica

Se recrea la derivación de la condición de continuidad para las fases que devienen en las condiciones cinemáticas (relación de reflexión y refracción) pero se considera un vector de onda complejo (7).

$$k_1 \sin\theta_i = \tilde{k}_2 \sin\tilde{\theta}_t \tag{9}$$

La propagación de la onda transmitida tiene una dependencia espacial

$$\tilde{\mathbf{k}}_2 \cdot \mathbf{r} = \tilde{k}_2 \left(x \sin\tilde{\theta}_t + z\cos\tilde{\theta}_t \right),$$

si el coseno del ángulo complejo se escribe en notación polar $\cos\tilde{\theta}_t = \alpha\cos\phi + i\alpha\sin\phi$, se obtiene

$$\tilde{\mathbf{k}}_2 \cdot \mathbf{r} = k_1 \sin\theta_i x + (k_{2re} + ik_{2im})(\cos\phi + i\sin\phi)\,\alpha z$$

que puede reagruparse en la parte real e imaginaria

$$\tilde{\mathbf{k}}_2 \cdot \mathbf{r} = (k_1 \sin\theta_i x + k_{2re}\alpha z\cos\phi - k_{2im}\alpha z\sin\phi) + i\alpha z\,(k_{2re}\sin\phi + k_{2im}\cos\phi) \tag{10}$$

la atenuación es entonces en la dirección z. Los planos de equifase están dados por la constancia del primer término.

$$\tilde{\mathbf{k}}_2 \cdot \mathbf{r} = \frac{(1+i)}{\delta}\left(x\sin\tilde{\theta}_t + z\cos\tilde{\theta}_t \right) = \frac{(1+i)}{\delta}\left(x\sin\tilde{\theta}_t + z\sqrt{1-\sin^2\tilde{\theta}_t} \right)$$

Los resultados de continuidad de los campos son válidos para vectores complejos, de manera que si reexpresamos los resultados con vectores de onda o índices de refracción complejos los resultados son análogos. Por ejemplo, para incidencia normal, la reflectividad de amplitudes es

$$R_a = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} = \frac{\frac{\lambda}{2\pi\delta}(1+i) - n_1}{\frac{\lambda}{2\pi\delta}(1+i) + n_1}$$

mientras que la reflectancia de intensidades es

$$R_I = \frac{\left(1 - \frac{2\pi\delta n_1}{\lambda}\right)^2 + 1}{\left(1 + \frac{2\pi\delta n_1}{\lambda}\right)^2 + 1} \simeq 1 - 2\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right) n_1 \tag{11}$$

donde la última aproximación es válida para longitudes de penetración pequeñas.