Interfase dieléctrica

manuel fernández guasti

7 de febrero de 2007

1. interfase plana

Sean dos medios homogéneos 1 y 2 con permitividad y permeabilidad $\mu_1\varepsilon_1$ y $\mu_2\varepsilon_2$ respectivamente. Considere soluciones de ondas planas en cada uno de los medios semi-infinitos. Sea el campo eléctrico incidente una onda plana

$$\mathbf{E}_{1i}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_{01i}\exp(i\mathbf{k}_{1i}\cdot\mathbf{r} - i\omega t) \tag{1}$$

y su correspondiente campo magnético

$$\mathbf{B}_{1i}(\mathbf{r},t) = \mathbf{B}_{01i}\exp(i\mathbf{k}_{1i}\cdot\mathbf{r} - i\omega t) = \sqrt{\mu_1\varepsilon_1}\hat{k}_{1i}\times\mathbf{E}_{1i}. \tag{2}$$

Permita la hipótesis que existe una onda reflejada

$$\mathbf{E}_{1r}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_{01r}\exp(i\mathbf{k}_{1r}\cdot\mathbf{r} - i\omega t) \tag{3}$$

y una transmitida (o refractada)

$$\mathbf{E}_{2t}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_{02t}\exp(i\mathbf{k}_{2t}\cdot\mathbf{r} - i\omega t) \tag{4}$$

De la ecuación de onda que satisfacen podemos establecer la relación entre las magnitudes de los vectores de onda.

$$|\mathbf{k}_{1i}| = |\mathbf{k}_{1r}| = \frac{\omega}{c}\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}$$

$$|\mathbf{k}_{2t}| = \frac{\omega}{c}\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}$$

2. condiciones de frontera

En $z=0$ en todos los puntos del plano para todo tiempo los campos deben ser iguales de manera que las fases en la interfase deben ser iguales

$$i\mathbf{k}_{1i}\cdot\mathbf{r}(x,y,0) - i\omega t = i\mathbf{k}_{1r}\cdot\mathbf{r}(x,y,0) - i\omega t = i\mathbf{k}_{2t}\cdot\mathbf{r}(x,y,0) - i\omega t$$

de aquí se establecen las condiciones cinemáticas. Sea $\hat{n}$ el vector normal a la superficie, en éste caso en la dirección z. Considere el vector $\mathbf{r}$ en la dirección

x, de manera que el ángulo con el vector de onda es $\mathbf{k}_{1i}\angle\hat{e}_x = \frac{\pi}{2} - \theta_i$, entonces el producto punto es

$$\mathbf{k}_{1i} \cdot \mathbf{r}\,(x, 0, 0) = k_1\,|x| \sin\theta_i.$$

El resultado es análogo para los otros vectores de onda y todos se encuentran en el mismo plano, denominado plano de incidencia. Las condiciones cinemáticas son entonces

$$k_1 \sin\theta_i = k_1 \sin\theta_r \tag{5}$$

el ángulo de reflexión y el incidente son iguales. Por otro lado, $k_1 \sin\theta_i = k_2 \sin\theta_t$, invocando la definición del índice de refracción

$$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t \tag{6}$$

se reproduce la ley de Snell.

3. propiedades dinámicas

Las componentes tangenciales de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ son contínuas mientras que las componentes normales de $\mathbf{D}$ y $\mathbf{B}$ son contínuas. Para $\mathbf{E}$ obtenemos

$$(\mathbf{E}_{01i} + \mathbf{E}_{01r}) \times \hat{n} = \mathbf{E}_{02t} \times \hat{n}. \tag{7}$$

Mientras que la continuidad de $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B} = \frac{1}{\mu}\mathbf{k} \times \mathbf{E}$ deviene

$$\left(\frac{1}{\mu_1}\mathbf{k}_{1i} \times \mathbf{E}_{01i} + \frac{1}{\mu_1}\mathbf{k}_{1r} \times \mathbf{E}_{01r}\right) \times \hat{n} = \frac{1}{\mu_2}\mathbf{k}_{2t} \times \mathbf{E}_{02t} \times \hat{n}. \tag{8}$$

Para $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ obtenemos de la divergencia

$$(\varepsilon_1\mathbf{E}_{01i} + \varepsilon_1\mathbf{E}_{01r}) \cdot \hat{n} = \varepsilon_2\mathbf{E}_{02t} \cdot \hat{n}, \tag{9}$$

mientras que la continuidad de $\mathbf{B} = \mathbf{k} \times \mathbf{E}$

$$(\mathbf{k}_{1i} \times \mathbf{E}_{01i} + \mathbf{k}_{1r} \times \mathbf{E}_{01r}) \cdot \hat{n} = \mathbf{k}_{2t} \times \mathbf{E}_{02t} \cdot \hat{n} \tag{10}$$

3.1. Campo eléctrico perpendicular al plano de incidencia

De la ecuación (7) se obtiene

$$E_{01i\perp} + E_{01r\perp} = E_{02t\perp}$$

y puesto que $(\mathbf{k}_{1i} \times \mathbf{E}_{01i}) \times \hat{n} = \sqrt{\mu\varepsilon}\omega E_{01i\perp} \cos\theta_i$, de la ecuación (8)

$$\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}E_{01i\perp} - \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}E_{01r\perp}\right)\cos\theta_i = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}E_{02t\perp} \cos\theta_t$$

La tercera relación es cero mientras que la última reproduce ésta última igualdad. De éstas dos ecuaciones anteriores podemos obtener la razón de amplitudes de reflexión

$$R_{a\perp} = \frac{E_{01r\perp}}{E_{01i\perp}} = \frac{n_1 \cos\theta_i - \frac{\mu_1}{\mu_2}\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\theta_i}}{n_1 \cos\theta_i + \frac{\mu_1}{\mu_2}\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\theta_i}}, \tag{11}$$

así como la razón de refracción

$$T_{a\perp} = \frac{E_{02t\perp}}{E_{01i\perp}} = \frac{2n_1 \cos\theta_i}{n_1 \cos\theta_i + \frac{\mu_1}{\mu_2}\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\theta_i}}. \tag{12}$$

3.2. Campo eléctrico paralelo al plano de incidencia

La continuidad del campo eléctrico (7) es entonces

$$\left(E_{01i\parallel} - E_{01r\parallel}\right)\cos\theta_i = E_{02t\parallel}\cos\theta_t,$$

mientras que la continuidad de H (8) o D contínua (9) y la ley de Snell es

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}E_{01i\parallel} + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}E_{01r\parallel} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}E_{02t\parallel}.$$

De donde obtenemos

$$R_{a\parallel} = \frac{\frac{\mu_1}{\mu_2}n_2^2 \cos\theta_i - n_1\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\theta_i}}{\frac{\mu_1}{\mu_2}n_2^2 \cos\theta_i + n_1\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\theta_i}} \tag{13}$$

y

$$T_{a\parallel} = \frac{2n_1 n_2 \cos\theta_i}{\frac{\mu_1}{\mu_2}n_2^2 \cos\theta_i + n_1\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\theta_i}} \tag{14}$$

3.2.1. Incidencia normal - medio no magnético

Entonces, $\mu_1 = \mu_2$, las relaciones anteriores son

$$R_a = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}, \qquad T_a = \frac{2n_1}{n_2 + n_1}. \tag{15}$$

4. Análisis de resultados

En el análisis subsiguiente consideraremos un medio no magnético.

4.1. Ángulo de Brewster

En el caso paralelo, el coeficiente de transmisión (14) es nulo si el numerador es cero. Entonces

$$1-\frac{n_1}{n_2}\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta_i}-\frac{n_1^2}{n_2^2}\tan^2\theta_i}=0$$

utilizando la identidad $\tan^2\theta_i+1=\cos^{-2}\theta_i$, obtenemos

$$\tan\theta_B=\frac{n_2}{n_1}. \tag{16}$$

Éste resultado lo podemos reescribir de la ecuación anterior y la relación de refracción como

$$n_1\sin\theta_B=n_2\cos\theta_B=n_2\sin(\theta_t)$$

donde la segunda igualdad se cumple si $\theta_B+\theta_t=\pi/2$.

4.2. Reflexión total interna

Si la luz se transmite de un medio más denso a uno menos denso $n_1>n_2$ y de la relación de refracción el ángulo de transmisión es 90° ($\sin\theta_t=1$) si

$$\sin\theta_c=\frac{n_2}{n_1}. \tag{17}$$

para $\theta>\theta_c$ se obtiene reflexión total interna. La relación de Snell es entonces

$$\sin\theta_t=\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_c}$$

y el coseno del ángulo transmitido es entonces

$$\cos\theta_t=\sqrt{1-\frac{\sin^2\theta_i}{\sin^2\theta_c}}=i\sqrt{\frac{\sin^2\theta_i}{\sin^2\theta_c}-1}.$$

La onda exhibe una fase $\mathbf{k}_{2t}\cdot\mathbf{r}=k_{2t}(x\sin\theta_t+z\cos\theta_t)$ de manera que

$$\exp(i\mathbf{k}_{2t}\cdot\mathbf{r}-i\omega t)=\exp\left(ik_{2t}x\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_c}\right)\exp\left(-k_{2t}z\sqrt{\frac{\sin^2\theta_i}{\sin^2\theta_c}-1}\right)\exp(-i\omega t)$$

que representa una onda evanescente en la dirección z.

5. Energía y flujo

La densidad de energía promediada en el tiempo es

$$U=\frac{1}{4}\left(\varepsilon\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*+\frac{1}{\mu}\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}^*\right) \tag{18}$$

que para una onda plana es

$$U = \frac{1}{\varepsilon} \left| \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0 \right| . \tag{19}$$

Mientras que el flujo promedio está dado por el vector de Poynting

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \tag{20}$$

que para la onda plana es

$$\mathbf{S} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left| \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0 \right| \hat{\mathbf{k}} = \frac{n}{\mu c} \left| \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0 \right| \hat{\mathbf{k}}. \tag{21}$$

El flujo entre la densidad de energía de (21) y (19) es

$$\frac{S}{U} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \hat{\mathbf{k}} = v\hat{\mathbf{k}},$$

la velocidad de propagación de la energía.

El cociente de los flujos de energía reflejado e incidente es

$$R_I = R_a^2,$$

mientras que el cociente de los flujos transmitido e incidente es

$$T_I = \frac{n_2}{n_1} T_a^2.$$