medios materiales

manuel fernández guasti

14 de mayo de 2008

1. derivación microscópica de la permitividad

El campo eléctrico ejerce una fuerza sobre una carga dada por la fuerza de Lorentz

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \tag{1}$$

Si consideramos velocidades pequeñas de manera que la fuerza eléctrica sea dominante[1],

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}. \tag{2}$$

La ecuación de movimiento para f_j partículas, digamos electrones $(q = -ef_j)$ ligados armónicamente a un átomo es entonces

$$\ddot{\mathbf{x}} + \gamma_j \dot{\mathbf{x}} + \Omega_j^2 \mathbf{x} = -ef_j \mathbf{E}.$$

Si el campo eléctrico varía armónicamente en el tiempo, la solución de la ecuación es

$$\mathbf{x} = \frac{-e}{m} \frac{f_j}{\left(\Omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j \omega\right)} \mathbf{E}$$

El momento dipolar es $\mathbf{p} = -e\,\mathbf{x}$ y la polarización macroscópica se obtiene de la suma de N dipolos por unidad de volumen

$$\mathbf{D}_{b\&f} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + N \langle \mathbf{p} \rangle = \varepsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E}$$

La permitividad compleja es entonces

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{Ne^2}{m} \sum \frac{f_j}{\left(\Omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j \omega\right)} = \varepsilon_0 + \frac{Ne^2}{m} \sum \frac{f_j \left(\Omega_j^2 - \omega^2 + i\gamma_j \omega\right)}{\left(\Omega_j^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma_j^2 \omega^2}. \tag{3}$$

La parte real de la permitividad es

$$\varepsilon_{re} = \varepsilon_0 + \frac{Ne^2}{m} \sum \frac{f_j \left(\Omega_j^2 - \omega^2\right)}{\left(\Omega_j^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma_j^2 \omega^2}, \tag{4}$$

mientras que la parte imaginaria es

$$\varepsilon_{im} = \frac{Ne^2}{m} \sum \frac{f_j \gamma_j \omega}{\left(\Omega_j^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma_j^2 \omega^2}. \tag{5}$$

[1] La contribución del campo magnético es importante puesto que las velocidades electrónicas si pueden ser relativistas. De manera que ésta aproximación es limitada.

2. índice de refracción

El índice de refracción es igual a la raíz de la permitividad relativa. El índice de refracción complejo se obtiene de la raíz de un número complejo (18)

$$n = n_{re} + i n_{im} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_0}} \left(\sqrt{\sqrt{\varepsilon_{re}^2 + \varepsilon_{im}^2} + \varepsilon_{re}} + i \sqrt{\sqrt{\varepsilon_{re}^2 + \varepsilon_{im}^2} - \varepsilon_{re}} \right). \quad (6)$$

La parte real es

$$n_{re} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_0}} \left(\left(\varepsilon_{re}^2 + \varepsilon_{im}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon_{re} \right)^{\frac{1}{2}},$$

mientras que la parte imaginaria es

$$n_{im} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_0}} \left(\left(\varepsilon_{re}^2 + \varepsilon_{im}^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \varepsilon_{re} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si la parte imaginaria es mucho menor que la parte real

$$\sqrt{\varepsilon_{re} + i\varepsilon_{im}} \approx \sqrt{\varepsilon_{re}} + i \frac{\varepsilon_{im}}{2\sqrt{\varepsilon_{re}}}, \qquad \varepsilon_{im} \ll \varepsilon_{re}.$$

Consideremos una resonancia y para establecer una notación más compacta, definimos la desintonía, la frecuencia promedio y el coeficiente α

$$\triangle = \Omega - \omega, \quad 2\bar{\omega} = \Omega + \omega, \quad \frac{Ne^2 f}{m\varepsilon_0} = \alpha,$$

de manera que

$$\frac{\varepsilon_{re}}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{\alpha 2\bar{\omega}\triangle}{\left(2\bar{\omega}\triangle\right)^2 + \gamma^2\omega^2},$$

$$\frac{\varepsilon_{im}}{\varepsilon_0} = \frac{\alpha\gamma\omega}{\left(2\bar{\omega}\triangle\right)^2 + \gamma^2\omega^2}.$$

La parte real del índice de refracción es entonces

$$n_{re} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left[\left(1 + \frac{\alpha 2\bar{\omega}\triangle}{\left(2\bar{\omega}\triangle\right)^2 + \gamma^2\omega^2} \right)^2 + \left(\frac{\alpha\gamma\omega}{\left(2\bar{\omega}\triangle\right)^2 + \gamma^2\omega^2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + 1 + \frac{\alpha 2\bar{\omega}\triangle}{\left(2\bar{\omega}\triangle\right)^2 + \gamma^2\omega^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

mientras que la parte imaginaria es

$$n_{im} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left[\left(1 + \frac{\alpha 2\bar{\omega}\triangle}{\left(2\bar{\omega}\triangle\right)^2 + \gamma^2\omega^2} \right)^2 + \left(\frac{\alpha\gamma\omega}{\left(2\bar{\omega}\triangle\right)^2 + \gamma^2\omega^2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - 1 - \frac{\alpha 2\bar{\omega}\triangle}{\left(2\bar{\omega}\triangle\right)^2 + \gamma^2\omega^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

3. Sistemas específicos

En ésta sección abordamos distintas aproximaciones dependiendo del medio material.

3.1. Sistema diluido - gases

Si el término $\chi_{re} = \alpha 2\bar{\omega} \triangle / \left[(2\bar{\omega}\triangle)^2 + \gamma^2\omega^2 \right]$ es mucho menor que uno, frecuentemente debido a que α es muy pequeño. Entonces $\sqrt{(1+\chi_{re})^2 + \chi_{im}^2} = (1+\chi_{re})\sqrt{1 + \frac{\chi_{im}^2}{(1+\chi_{re})^2}} \approx (1+\chi_{re})\left[1 + \frac{\chi_{im}^2}{2(1+\chi_{re})^2}\right]$ y $\sqrt{1+\chi_{re}} \approx 1 + \frac{\chi_{re}}{2}$, de manera que

$$n_{re} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left[(1+\chi_{re})^2 + \chi_{im}^2 \right]^{\frac{1}{2}} + 1 + \chi_{re} \right\}^{\frac{1}{2}} \cong 1 + \frac{\chi_{re}}{2}$$

mientras que para la parte imaginaria es

$$n_{im} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left[(1+\chi_{re})^2 + \chi_{im}^2 \right]^{\frac{1}{2}} - 1 - \chi_{re} \right\}^{\frac{1}{2}} \approx \frac{\chi_{im}}{2\sqrt{1+\chi_{re}}} \approx \frac{\chi_{im}}{2}$$

3.1.1. vecindad de resonancia

Por otro lado, si $\triangle$ es pequeño, $\bar{\omega} \cong \omega$, entonces

$$\chi_{re} = \frac{\alpha 2\bar{\omega}\triangle}{(2\bar{\omega}\triangle)^2 + \gamma^2\omega^2} \cong \frac{\alpha}{2\omega} \frac{\triangle}{\triangle^2 + \frac{\gamma^2}{4}}$$

y

$$\chi_{im} = \frac{\alpha\gamma\omega}{(2\bar{\omega}\triangle)^2 + \gamma^2\omega^2} \cong \frac{\alpha}{2\omega} \frac{\gamma}{\triangle^2 + \frac{\gamma^2}{4}}$$

Con éstas aproximaciones

$$n_{re}^{(aprox)} \cong 1 + \frac{\chi_{re}}{2} = 1 + \frac{\alpha}{4\omega} \frac{\triangle}{\triangle^2 + \frac{\gamma^2}{4}} \tag{9}$$

mientras que

$$n_{im}^{(aprox)} \cong \frac{\chi_{im}}{2} = \frac{\alpha}{4\omega} \frac{\gamma}{\triangle^2 + \frac{\gamma^2}{4}} \tag{10}$$

3.2. Corrección de campo local

La polarización

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\,\mathbf{E} \tag{11}$$

donde la polarización macroscópica $\mathbf{P} = N\langle\mathbf{p}\rangle$ proviene de la suma de los dipolos microscópicos. Sin embargo, éste resultado ignora la contribución del campo de un dipolo sobre otro dipolo. Es decir, es válido cuando los dipolos no están muy cerca unos de otros, como sucede en un gas. Sin embargo, en líquidos y sólidos la densidad de dipolos es mucho mayor y es necesario considerar la influencia del campo generado por el conjunto de los dipolos. Sea el campo interno promedio generado por los dipolos vecinos $\mathbf{E}_{int}$. El campo total al que está sujeto un dipolo es

$$\mathbf{E}_{loc} = \mathbf{E} + \mathbf{E}_{int}$$

de manera que la polarización macroscópica es

$$\mathbf{P} = N \langle \mathbf{p}_{loc} \rangle = N\varepsilon_0\gamma \left(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{int}\right) \tag{12}$$

Para un momento dipolar $\mathbf{p}$ con respecto al centro de una esfera, el campo eléctrico promedio dentro de la esfera es

$$\mathbf{E}_{int} = \frac{1}{3\varepsilon_0}\mathbf{P},$$

de manera que de 11

$$\mathbf{E}_{int} = \frac{1}{3\varepsilon_0}\left(\varepsilon - \varepsilon_0\right)\mathbf{E}.$$

La polarización con la contribución de campo local (12) es entonces

$$\mathbf{P} = N\varepsilon_0\gamma\left(\mathbf{E} + \frac{\left(\varepsilon - \varepsilon_0\right)\mathbf{E}}{3\varepsilon_0}\right) \tag{13}$$

Igualando las expresiones 11 y 13

$$\left(\varepsilon - \varepsilon_0\right)\mathbf{E} = N\varepsilon_0\gamma\left(\mathbf{E} + \frac{\left(\varepsilon - \varepsilon_0\right)\mathbf{E}}{3\varepsilon_0}\right)$$

de donde se obtiene la expresión de Clausius-Mossitti

$$\gamma = \frac{3}{N}\left(\frac{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1}{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + 2}\right) = \frac{3}{N}\left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\right). \tag{14}$$

En términos del índice de refracción y la densidad, ésta expresión se conoce como la fórmula de Lorentz-Lorenz

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}\right) = const.$$

3.3. conductores

Si existen electrones libres, *i.e.* no ligados como en los metales, su frecuencia de oscilación Ω_j es cero, la permitividad (3) es entonces

$$\varepsilon = \varepsilon_b + \frac{Ne^2}{m\omega}\frac{f_0}{\left(-\omega - i\gamma_0\right)} \tag{15}$$

Con éste resultado se evalúa el desplazamiento eléctrico

$$\frac{\partial \mathbf{D}_{b\&f}}{\partial t} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E} = -i\omega\varepsilon_b\mathbf{E} + \frac{Ne^2}{m}\frac{f_0}{(\gamma_0 - i\omega)}\mathbf{E} \tag{16}$$

y la constante se agrupa en la conductividad eléctrica σ

$$\sigma = \frac{Ne^2}{m}\frac{f_0}{(\gamma_0 - i\omega)} \tag{17}$$

Éste es el modelo desarrollado por Drude. La corriente entonces satisface el modelo de Ohm $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$.

A. apéndice

La raíz de un número complejo

$$a + ib = \sqrt{a^2 + b^2}\exp\left[i\arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right],$$

es

$$\sqrt{a+ib} = \sqrt[4]{a^2+b^2}\exp\left[i\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right].$$

Por el teorema general aditivo

$$e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta + i\sin\theta = \left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} + 2i\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

de donde $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\cos\theta}$ y $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\cos\theta}$. Si $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$, de la relación de Euler

$$\sqrt{a+ib} = \sqrt[4]{a^2+b^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\cos\theta} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\cos\theta}\right)$$

Recordemos que $\cos\left[\arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right] = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ de manera que $\sqrt{a+ib} = \sqrt[4]{a^2+b^2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$ se puede reescribir como

$$\sqrt{a+ib} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{a^2+b^2}\left(\sqrt{1+\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}} + i\sqrt{1-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}\right)$$

que puede simplificarse como

$$\sqrt{a+ib} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+a} + i\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}\right) \tag{18}$$