Potenciales escalar y vectorial

manuel fernández guasti

20 de febrero de 2007

1. Potenciales

Las ecuaciones de Maxwell son

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \tag{1}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{2}$$
$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \tag{3}$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{4}$$

Puesto que la divergencia del desplazamiento magnético es cero, éste campo puede escribirse en términos de un rotacional

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{5}$$

Si se sustituye éste resultado en la ecuación (4) se obtiene

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \nabla \times \mathbf{A}}{\partial t} \qquad \Rightarrow \qquad \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0,$$

y una cantidad irrotacional puede escribirse como el gradiente de un campo $\mathbf{E} + \partial \mathbf{A}/\partial t = -\nabla \phi$, el campo eléctrico en términos de los potenciales es entonces

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \tag{6}$$

1.1. normas

Puesto que el rotacional de un gradiente es cero, al potencial vectorial en la ecuación (5) se le puede agregar un gradiente $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \xi$. Para mantener el campo eléctrico invariante ante esta transformación es necesario modificar el potencial escalar $\phi \rightarrow \phi - \partial \xi / \partial t$. Éste grado de libertad nos permite escoger una relación entre los potenciales. En la norma de Lorentz se escoge

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial t}, \tag{7}$$

mientras que en la norma de Coulomb se utiliza

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \tag{8}$$

1.2. norma de Lorentz

La ecuación (1) en términos de los potenciales es

$$\nabla^2\phi + \frac{\partial \nabla\cdot\mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon},$$

y de la norma de Lorentz se obtiene que el potencial escalar satisface la ecuación de onda

$$\nabla^2\phi - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \tag{9}$$

La ecuación (3) puede escribirse como

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{A} = -\mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\phi + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right) + \mu\mathbf{J}.$$

Ésta expresión con la identidad vectorial del rotacional es

$$\nabla^2\mathbf{A} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu\varepsilon\nabla\frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A}\right) - \mu\mathbf{J},$$

y si se utiliza la norma de Lorentz

$$\nabla^2\mathbf{A} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J}, \tag{10}$$

se obtiene que el potencial vectorial también satisface la ecuación de onda.

2. electrostática

Si las dependencias temporales son cero, los potenciales satsifacen la ecuación de Poisson y las soluciones son entonces

$$\phi\left(\mathbf{r}\right) = \frac{1}{\varepsilon}\int_V \frac{\rho\left(\mathbf{r}'\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}dv' \tag{11}$$

y

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{r}\right) = \mu\int_V \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{r}'\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}dv'. \tag{12}$$

3. electrodinámica

Para campos dependientes del tiempo se introducen potenciales retardados

$$\phi\left(\mathbf{r},t\right) = \frac{1}{\varepsilon}\int_V \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t-\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|/c\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}dv' \tag{13}$$

y

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{r},t\right) = \mu\int_V \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t-\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|/c\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}dv'. \tag{14}$$