Reacción de radiación

manuel fernández guasti

6 de marzo de 2007

Dos tipos de problemas se han abordado:

1. Se considera como condición inicial un campo electromagnético (por ejemplo, una onda plana); se ha encontrado entonces la trayectoria de una partícula o distribución de carga sujeta a dicho campo.

2. Se considera como condición inicial la trayectoria de una partícula o distribución de carga (por ejemplo, corriente o carga acelerada); se encuentra entonces el campo electromagnético que se deriva de dicha

- esparcimiento - en el caso de esparcimiento se evalúa el primer esquema, es decir la trayectoria debida a un campo externo y posteriormente el segundo esquema antes descrito, es decir, la radiación emitida por el movimiento de la carga.

Sin embargo, cuando una carga radía pierde energía y su movimiento subsecuente debe modificarse. Éste problema, que no se ha resuelto adecuadamente desde un punto de vista fundamental, se conoce como reacción de radiación.

La potencia radiada por una carga acelerada cuya velocidad no es relativista está dada por la fórmula de Larmor que se encuentra a partir de los potenciales retardados de Lienard-Wiechert.

$$P = -\frac{dW}{dt} = \frac{2e^2\ddot{r}^2}{3c^3}. \tag{1}$$

La ecuación de movimiento de una carga, de acuerdo a la mecánica newtoniana es

$$m\ddot{r} = F = F_e + F_r$$

sin embargo, ahora la fuerza consiste en la suma de la fuerza externa que produce el movimiento acelerado en primera instancia mas la fuerza generada por la radiación emitida. Puesto que la energía es fuerza por distancia y la potencia es energía por unidad de tiempo, la fuerza asociada con la radiación emitida por la carga en forma diferencial es $F_r \cdot \dot{r} = \frac{dW}{dt}$ y de la fórmula de Larmor

$$F_r \cdot \dot{r} = -\frac{2e^2\ddot{r}^2}{3c^3}$$

Si integramos ésta expresión sobre un intervalo de tiempo (Marion argumenta que $\dot{r}$ y $\ddot{r}$ son variables independientes de manera que sólo se puede encontrar el *promedio*)

$$\int_{t_1}^{t_2} F_r \cdot \dot{r} dt = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{2e^2 \ddot{r}^2}{3c^3} dt$$

Integrando por partes $\ddot{r} \to x,\ \ddot{r} \to dy$, en términos de la velocidad $u \equiv \dot{r}$ se obtiene

$$\int_{t_1}^{t_2} F_r \cdot u dt = -\frac{2e^2}{3c^3}\ u \cdot \dot{u}|_{t_1}^{t_2} + \frac{2e^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} u \cdot \ddot{u} dt$$

El término $u \cdot \dot{u}$ representa la energía en el campo inducido y oscila entre la fuente y el campo. Si se considera un intervalo pequeño o movimiento periódico con pérdida pequeña en un ciclo se puede despreciar éste término para obtener

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(F_r - \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{u} \right) \cdot u dt = 0$$

de manera que

$$F_r = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{u}$$

es decir, una fuerza que depende de la tercera derivada de la posición. La ecuación de movimiento es entonces

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{2e^2}{3c^3} \frac{d^3 r}{dt^3} = F_e$$

Si la fuerza externa corresponde al oscilador armónico $F_e/m = -\Omega^2 r$ y se considera una solución inicial aproximada ignorando el término en terceras derivadas $r \approx r_0 e^{-i\Omega t}$, entonces la ecuación

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{2e^2}{3mc^3} \frac{d^3 r}{dt^3} + \Omega^2 r = 0, \tag{2}$$

se puede aproximar por

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{2\Omega^2 e^2}{3mc^3} \frac{dr}{dt} + \Omega^2 r = 0$$

puesto que

$$\frac{d^3 r}{dt^3} \approx -\Omega^2 \dot{r}.$$

La ecuación diferencial corresponde entonces a un oscilador armónico con un término disipativo como se utilizó para describir la permitividad compleja. Sin embargo, los resultados de la constante de amortiguamiento no corresponden con los observados experimentalmente.