# Fermi, Pasta, Ulam y el nacimiento de la matemática experimental

*Hace 54 años, Enrico Fermi, John Pasta y Stanislaw Ulam informaron de un experimento numérico que todavía hoy sigue alentando nuevos descubrimientos*

**Mason A. Porter, Norman J. Zabusky, Bambi Hu y David K. Campbell**

**CONCEPTOS BASICOS**

- Fermi, Pasta y Ulam fueron los primeros en emplear un ordenador para explorar el comportamiento de un sistema físico, aparentemente sencillo pero inabordable con los métodos analíticos ordinarios.
- Se trataba de una cadena de masas unidas por muelles cuya fuerza de recuperación no era proporcional a su estiramiento.
- La complejidad de ese sistema derivaba de su no linealidad. Desde entonces, con diversas variantes, ha seguido siendo fuente de múltiples lecciones sobre la física de la complejidad.

Hace cuatro años, en 2005, científicos de todo el mundo conmemoraron el centenario del *annus mirabilis* de Einstein (1905), el año en que publicó trabajos asombrosos sobre el efecto fotoeléctrico, el movimiento browniano y la relatividad especial, golpes de genio que remodelaron la faz de la física. Curiosamente, el año 2005 correspondía también a otro importante aniversario en la física que ha pasado inadvertido para el público.

Cincuenta años antes, en mayo de 1955, el Laboratorio Científico de Los Alamos (como era conocido a la sazón) dio a conocer el informe técnico LA-1940, titulado "Studies of Nonlinear Problems: I" (Estudio de problemas no lineales: Parte I). Eran sus autores Enrico Fermi, John Pasta y Stanislaw Ulam, y los resultados expuestos en ese texto han venido sacudiendo al mundo científico desde entonces. No hay, en verdad, exageración al afirmar que el problema FPU, nombre que universalmente recibe en nuestros días el sistema que estudiaron Fermi, Pasta y Ulam, ha puesto en marcha una revolución en la ciencia moderna.

## Una vez tras otra

Ulam, en su introducción a la versión de LA-1940 publicada en las obras completas de Fermi en 1965, escribió que éste llevaba largo tiempo fascinado por un misterio fundamental de la mecánica estadística, "la flecha del tiempo". Imaginémonos que filmamos la colisión de dos bolas de billar: ruedan una hacia la otra, chocan y salen disparadas en distintas direcciones. Pasemos ahora la película en sentido retrógrado. El movimiento de las bolas resulta completamente natural. ¿Y por qué no habría de ser así? Las leyes de Newton, las ecuaciones que gobiernan el movimiento de las bolas, operan igual para ambas posiciones iniciales y para tiempos positivos o negativos.

Pero imaginemos ahora el comienzo de una partida de billar americano, con las 15 bolas de color perfectamente encajadas en un marco triangular y la bola blanca disparada contra ellas para dispersarlas por toda la mesa. Si filmamos la colisión y el caos consiguiente, nadie que haya tenido en sus manos un taco de billar podría pensar que la película se está pasando en el sentido de avance si se está proyectando hacia atrás; las bolas nunca recuperarían por sí solas su disposición triangular inicial. Y sin embargo, las leyes que gobiernan todas las colisiones siguen siendo las mismas que en el caso del choque de dos bolas. ¿Qué es, entonces, lo que confiere a la flecha del tiempo su sentido?

Por razones que más adelante comentaremos con mayor detalle, Fermi opinaba que la clave residía en la no linealidad, el apartarse los egresos de un sistema físico de la linealidad, o proporcionalidad con respecto a las señales de

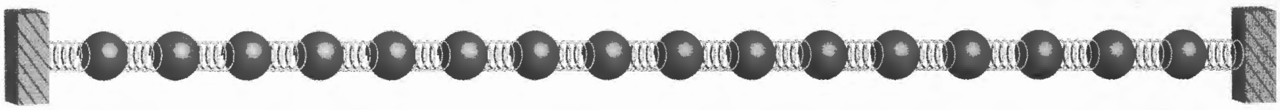
entrada. Sabía que el cálculo de las soluciones de unas ecuaciones de movimiento no lineales sería demasiado complicado para hacerlo con lápiz y papel.

Por fortuna, como a principios de los años cincuenta se hallaba en Los Alamos, pudo usar una de las primeras computadoras digitales. Los científicos de Los Alamos la habían bautizado humorísticamente con el acrónimo MANIAC (MAthematical Numerical Integrator And Computer). Realizaba cómputos numéricos mediante la "fuerza bruta" y resolvía así problemas (concernientes, en su mayor parte, a investigaciones secretas sobre armamento nuclear) que de otra forma habrían resultado imposibles de analizar. El problema FPU fue una de las primeras investigaciones no secretas que se efectuaron con el MANIAC; con él se inauguró la que a veces se ha dado en llamar "matemática experimental".

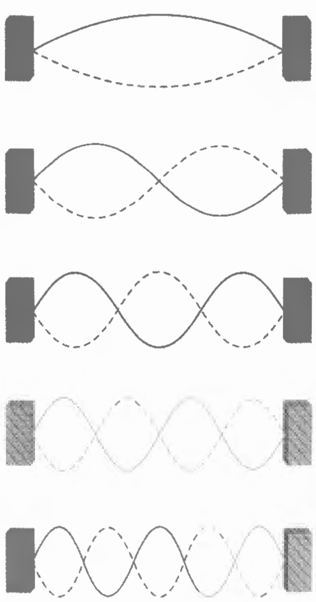
La expresión "matemática experimental" puede parecer contradictoria. Todo el mundo sabe que la validez de las matemáticas es independiente de lo que acontezca en el mundo físico o material. Sin embargo, a la investigación original de FPU se le puede asignar razonablemente el acta de nacimiento de la matemática experimental, si ésta es entendida como método para investigar de forma numérica, con ordenadores, problemas matemáticos o físicos refractarios, por su complejidad, a métodos de análisis más tradicionales.

**1. EN EL RIO SEVERN, EN INGLATERRA, se puede practicar el surf, porque, periódicamente, su amplio estuario recibe mareas excepcionalmente altas que crean macareo, olas que remontan el río. Las ondas que siguen al frente inicial conservan su forma durante muchos kilómetros, lo que permite a los surfistas cabalgadas larguísimas. Tales ondas no dispersivas se presentan en otros numerosos sistemas físicos, entre ellos un sistema de masas y muelles de apariencia engañosamente simple, que Enrico Fermi, John Pasta y Stanislaw Ulam estudiaron en 1955 mediante experimentación numérica en una computadora del Laboratorio Científico de Los Alamos. Aquella investigación abrió las puertas al descubrimiento asistido por ordenador. Ha influido profundamente en numerosos campos de la ciencia y de las matemáticas.**

En nuestros días, los estudios computacionales de problemas complejos (no lineales, por lo general) son tan frecuentes cuan fundamentales. El ordenador ocupa un legítimo puesto al lado de la experimentación física y del análisis teorético, y sirve de instrumento para el estudio de una miríada de fenómenos en la ciencia, la ingeniería y las propias matemáticas. Han sido realizadas ya, con ayuda de ordenadores, demostraciones matemáticas



**2. FERMI, PASTA Y ULAM MODELIZARON MATEMATICAMENTE una serie de masas interconectadas por resortes. Las masas se mueven hacia un lado y otro a lo largo de la recta que las conecta, y obedecen a la ley de movimiento de Newton, *f* = *ma* (fuerza igual a masa por aceleración). En este caso, las fuerzas que intervienen son las de recuperación que ejercen los muelles. Lo que confiere a aquel estudio tanta novedad y fascinación es que las fuerzas de recuperación son no lineales, es decir, no son directamente proporcionales a la elongación o compresión de los muelles.**



**3. FERMI, PASTA Y ULAM CONJETURABAN que la energía de su sistema de masas y muelles acabaría repartida equitativamente entre sus diferentes modos de movimiento, que son análogos a los de vibración de una cuerda de violín pulsada. En una cuerda tensa, el modo fundamental de vibración (*color violeta*) corresponde a la nota que oímos. Los modos vibratorios de frecuencias más elevadas corresponden a los diversos armónicos de esa nota. Los aquí mostrados corresponden al segundo armónico (*color lila*), al tercero (*en verde*), al cuarto (*azul*) y al quinto (*color anaranjado*).**

BARBARA AULICINO/*American Scientist*

rigurosas, como es el caso del "problema de los cuatro colores". En mecánica de fluidos, las visualizaciones informáticas de complejos flujos dependientes del tiempo han resultado cruciales para extraer los mecanismos físicos que les subyacen. La interpretación de experimentos en física de materia condensada, de las observaciones de la astrofísica o de los datos proporcionados por la bioinformática hubiera sido totalmente imposible sin ayuda de ordenadores. Mucho se ha avanzado desde el estudio FPU y, bajo esta luz, resulta especialmente importante comprender cómo se desarrolló aquel trabajo seminal.

Fermi, con Pasta y Ulam, propuso investigar lo que él presumía que sería un sistema dinámico no lineal muy simple: una cadena de masas interconectadas por muelles, que sólo pudieran desplazarse en uno u otro sentido por la recta definida por la cadena. El conjunto idealizado de masas y muelles de FPU no experimentaba fricción ni calentamiento interno, es decir, no sufría pérdidas de energía, por lo que podía oscilar eternamente. Sin embargo, los muelles de este sistema teórico no eran del tipo que se estudia en los cursos elementales de física: la fuerza de recuperación *no era* proporcional a su elongación o compresión. En el problema FPU intervenían componentes no lineales en la relación matemática entre la medida de la deformación y la fuerza de recuperación resultante.

La cuestión clave que FPU deseaban estudiar consistía en determinar cuánto tardarían las oscilaciones de la ristra de masas y muelles no lineales en alcanzar el equilibrio. El equilibrio que esperaban era similar al equilibrio térmico de un gas. En los gases monoatómicos, como el helio, alcanzado el equilibrio, la energía térmica (cinética) de las moléculas se encuentra repartida por igual entre las tres posibles componentes, paralelas a los ejes *x*, *y* o *z*, que puede tener su movimiento. Alcanzado el equilibrio, no habrá, por ejemplo, más átomos rebotando arriba o abajo que hacia la izquierda o la derecha.

La equitativa repartición de la energía entre los diferentes modos de movimiento es de carácter fundamental. Se puede generalizar ese principio, conocido como *teorema de equipartición* en la mecánica estadística, para dar cabida a moléculas más complicadas que las del helio —asimiladas éstas a bolas de billar— que puedan repartir también su energía en movimientos de vibración o de rotación. La aplicación del teorema de equipartición permite el cálculo de magnitudes —por ejemplo, la capacidad calorífica de un gas— a partir de los fundamentos de la teoría.

La premisa de FPU consistía en suponer que podían poner en marcha su sistema con las masas en sólo un modo sencillo de oscilación. Si los muelles del sistema fuesen lineales (sin fuerzas de amortiguación), ese modo proseguiría indefinidamente. Pero con muelles no lineales pueden quedar excitados diferentes modos de oscilación. El trío FPU esperaba que al transcurrir el tiempo el sistema se "termalizaría", es decir, que las masas en vibración acabarían repartiendo por igual su energía entre los distintos modos de oscilación posibles para ese sistema.

La visualización de los posibles modos de oscilación resulta un poco difícil para la hilera de masas del sistema FPU; en cambio, sí es sencillo comprender cómo surgen los diferentes modos de vibración al pulsar, digamos, la cuerda de un violín. Uno de los modos corresponde al tono fundamental, en el cual la cuerda tiene un desplazamiento máximo hacia arriba y abajo en su punto medio; va siendo progresivamente menor hacia los extremos fijos. Otro modo es el primer armónico (una octava más agudo), en el cual una mitad de la cuerda se está moviendo hacia arriba mientras la otra mitad lo hace hacia abajo, y así sucesivamente. Una cuerda tensa tiene una infinidad de modos de vibración, pero el sistema de FPU consta sólo de un número finito de modos (igual al número de masas del sistema).

Para realizar su estudio, FPU (juntamente con Mary Tsingou, la cual, aunque no figura en la autoría del informe, efectuó importantes aportaciones a la investigación) consideraron diferentes números de masas (16, 32 o 64) en sus experimentos computacionales. Luego, resolvieron numéricamente las ecuaciones no lineales acopladas que gobiernan el movimiento de las masas. (Estas ecuaciones se deducen de la función no lineal del muelle y de la famosa ley de Newton, $f = ma$.) Así, FPU utilizaron el MANIAC para computar el comportamiento del sistema en tiempos correspondientes a un número muy grande de períodos del modo fundamental en el que había sido lanzado el sistema. Los resultados les dejaron asombrados.

Al principio, la energía se hallaba repartida entre varios modos distintos. Más tarde (en tiempo simulado), su sistema retornó a una situación que parecía ser la de su estado de partida. De hecho, el 97 por ciento de la energía del sistema llegó a serle reintegrada al modo que habían preparado inicialmente. ¡Era como si las bolas de billar se hubieran reagrupado mágicamente desde su estado de dispersión hasta formar el triángulo perfecto del que partieron!

No todos se quedaron convencidos con estos cálculos. Una de las conjeturas más populares afirmaba que FPU no había hecho funcionar las simulaciones durante el tiempo suficiente, o tal vez el tiempo requerido para lograr la equipartición de energía en el sistema FPU era demasiado largo para poder ser observado numéricamente. Sin embargo, en 1972 otro físico de Los Alamos, James L. Tuck, y Tsingou (que por entonces utilizaba apellido de casada, Menzel) dieron fin a estas dudas efectuando simulaciones numéricas sumamente arduas que hallaron recurrencias a escalas temporales tan grandes, que a veces se las denomina "superrecurrencias". Esta investigación puso de manifiesto que la equipartición de energía no le había quedado oculta a FPU a causa de simulaciones computarizadas demasiado breves: algo mucho más interesante había tomado cuerpo.

## 1 + 1 = 3

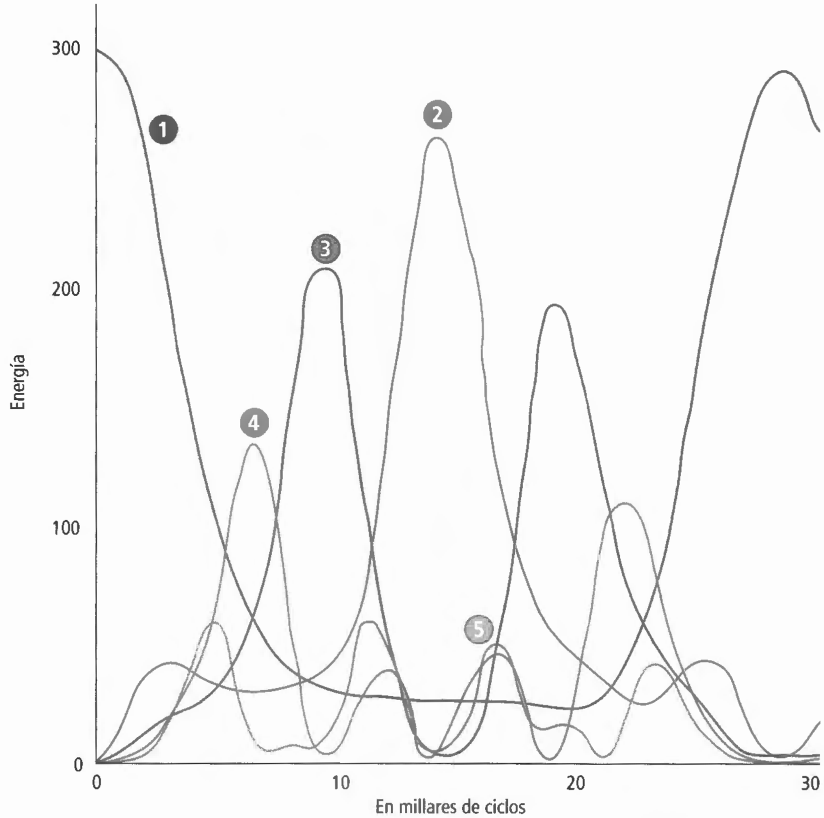
¿Por qué pensaban FPU que la no linealidad de los muelles iba a garantizar una equipartición de energía en su experimento? Y en todo caso, ¿en qué consiste esa extraña noción de no linealidad? Evidentemente, el término alude al abandono de la linealidad, que hasta ahora hemos presentado tan sólo como una proporcionalidad entre las entradas y las salidas de un sistema.

Los estudiantes de física apenas si ven otra cosa que sistemas lineales en los cursos introductorios. Su comprensión y análisis son mucho más sencillos. Al conectar una masa a un muelle lineal, el comportamiento posterior es muy simple: oscilará hacia delante y atrás a la frecuencia de resonancia del sistema, que depende sólo de la masa y de la constante elástica del muelle (el coeficiente que relaciona su elongación o compresión con la fuerza de recuperación). Pero cuando el muelle no es lineal, las cosas se complican bastante. Por ejemplo, la frecuencia de oscilación depende de la amplitud. Démosle a la masa un leve empujoncito, y el sistema oscilará a una frecuencia; golpeémosla con fuerza, y oscilará a otra.

Cuando se empieza a estudiar física, es fácil recibir la impresión de que los sistemas no lineales son más bien anómalos. En realidad, las interacciones no lineales son mucho más características del mundo real que las lineales. Por esta razón, hay quienes dicen que "ciencia no lineal" tiene el mismo sentido que hablar de "zoología no proboscídea" (broma que a veces se le atribuye, indebidamente, a Ulam).

¿En qué se diferencian los sistemas no lineales de los que sí lo son, aparte de contar con frecuencias de oscilación dependientes de la amplitud? En un sistema lineal, al duplicar el ingreso, se duplicará el egreso. Supongamos que alguien alza el doble la fuerza de su voz en el micrófono de un karaoke: los altavoces emitirán su voz con doble intensidad. Análogamente, si se canta a dúo, el egreso conjunto será la suma (la "superposición") de lo que habría resultado si cada voz hubiera interpretado su parte por separado. Además, si todo el sistema es verdaderamente lineal, las voces no sufrirán distorsión. Las frecuencias que resulten (es decir, las notas que se oigan) serán exactamente las mismas que el dúo introdujo, con independencia de su amplitud.

En el caso de los sistemas no lineales, todo se complica mucho. Por ejemplo: el principio




**4. AL INICIALIZAR SU SISTEMA, Fermi, Pasta y Ulam asignaron toda la energía al modo de vibración de más baja frecuencia (*1*) y calcularon lo que habría de suceder. Presumían que la energía acabaría repartiéndose por igual entre todos los modos de vibración posibles. Lo que observaron, en cambio, fue que la energía, tras ser compartida entre unos pocos modos de orden bajo, retornaba más tarde, en un porcentaje muy grande, al modo utilizado para poner en marcha el sistema. (Los colores se corresponden con los modos análogos de la figura 3.) Esta observación, a la que calificaron modestamente de "pequeño descubrimiento", señala el nacimiento de la matemática experimental.**

**5. EL INGENIERO JOHN SCOTT RUSSELL observó en los años treinta del siglo XIX, en el Union Canal de Escocia, una ola singular: no se dispersaba de la manera habitual, sino que conservaba su forma al progresar por el canal. Fueron necesarios más de cien años para que se comprendiera que este fenómeno es resultado de efectos no lineales que compensan la dispersión esperada. Uno de los autores (Zabusky) y el matemático Martin Kruskal acuñaron el término *solitón* para describir una onda de este tipo, que puede presentarse en una variedad de sistemas físicos. En esta fotografía, tomada en 1995, se muestra una tentativa de recrear en el Union Canal la ola de Russell. Sólo obtuvo un éxito parcial.**

CHRIS EILBECK, UNIVERSIDAD HERIOT WATT/*American Scientist*

de superposición deja de ser válido. Además, las frecuencias emitidas no son exclusivamente las ingresadas. Al gritar con fuerza en el micrófono del karaoke, el amplificador puede quedar sobrecargado y entrará en un régimen no lineal. Los altavoces emiten entonces sonidos fuertemente deformados, que contienen frecuencias que no se habían cantado. Y también tienen lugar otros efectos mucho más sutiles.

Uno de los efectos sutiles de la física no lineal fue observado en los años treinta del siglo XIX. John Scott Russell, un joven ingeniero, había sido contratado para que investigase la forma de mejorar las barcazas del Union Canal, cercano a Edimburgo. Por accidente, una de las sogas de sirga de una barcaza se rompió. Russell describió así lo sucedido: "Hallábame observando el movimiento de un bote que estaba siendo remolcado rápidamente por un canal estrecho, tirado por un par de caballos, cuando el bote se detuvo de pronto, pero no así la masa de agua que el bote había puesto en movimiento; se acumuló en torno a la proa de la embarcación en un estado de violenta agitación; entonces, de repente, la dejó atrás y salió lanzada hacia delante a gran velocidad, adoptando la forma de una elevación grande y solitaria, un apilamiento de agua, redondeado, liso y nítidamente definido, que prosiguió su curso por el canal sin que, al parecer, cambiase de forma o perdiera velocidad. Yo la seguí a caballo, y la adelanté cuando todavía avanzaba a unas ocho o nueve millas (unos 14 km) por hora, conservando su figura inicial, que medía unos treinta pies (9 metros) de largo y entre un pie y un pie y medio (entre 30 y 45 cm) de alto. Su altura fue disminuyendo gradualmente, y tras una persecución de un par de millas (3 km) la perdí de vista entre los recodos del canal".

Esa extraña ondulación no se comportó como las olas de la superficie del mar. Estas (y otras muchas clases de las ondas que nos son familiares) viajan a velocidades que dependen de su longitud de onda, fenómeno al que se denomina dispersión. Una perturbación como la creada ante la barcaza de Russell puede ser entendida como una superposición de ondas puramente sinusoidales, de distinta longitud de onda cada una. Sin embargo, si en el mar abierto se crea una perturbación compacta, cada una de las ondas componentes viajará a una velocidad diferente y, en consecuencia, la perturbación inicial no mantendrá su forma. Una tal onda se elongaría y deformaría.

Russell, que poseía una mente inquisitiva, se empeñó en estudiar su descubrimiento mediante experimentos controlados, en laboratorio, y en una publicación de 1844 cuantificó el fenómeno que había descubierto. Exponía en ella, por ejemplo, que en un canal las ondas solitarias de gran amplitud se desplazan a mayor velocidad que las pequeñas: un efecto no lineal.

El físico holandés Diederick Korteweg y su discípulo Gustav de Vries dedujeron en 1895 una ecuación en derivadas parciales, no lineal, conocida hoy por ecuación Korteweg-de Vries (KdV), la cual, sostenían, podía describir los resultados de los experimentos de Russell. Esta ecuación expresa que la tasa de cambio en el tiempo de la altura de la onda está gobernada por la suma de dos términos: uno no lineal (responsable de que las velocidades dependan de la amplitud) y otro lineal (responsable de la dispersión dependiente de la longitud de onda). En particular, Korteweg y de Vries descubrieron una solución en onda solitaria que se correspondía con la extraña ola que Russell había perseguido a caballo. Esta solución es fruto de un equilibrio entre no linealidad y dispersión. Los físicos holandeses hallaron asimismo otra solución periódica de su ecuación, pero no lograron obtener soluciones generales.

Tanto su trabajo como las observaciones de Russell cayeron en el olvido y hasta principios de los años sesenta fueron dejadas de lado por los matemáticos, físicos e ingenieros que estudiaban las ondas acuáticas. Por entonces, uno de los autores (Zabusky) y Martin Kruskal (fallecido), de la Universidad de Princeton, comenzaron a estudiar las cadenas FPU. Aunque partieron del modelo FPU, se valieron, en esencia, de masas y muelles infinitesimalmente pequeños, al objeto de representar una línea continua de material deformable, en lugar de una serie de masas individualizadas y discretas. Esta metodología les permitió examinar situaciones con grandes longitudes de onda y proporcionó una ecuación en derivadas parciales pareja a la habitual que describe las ondas lineales, con la salvedad de que modificaba la dispersión.

Kruskal, con la intención de representar en el sistema ondas progresivas, dedujo a partir de esta ecuación otra, que, como Kruskal y Zabusky comprendieron más tarde, resultaba ser la ecuación KdV. No parecía susceptible de tratamiento analítico; por eso, con la ayuda de Gary Deem, perteneciente entonces a los Laboratorios Bell, se valieron de simulaciones numéricas para observar una cuasirrecurrencia a las condiciones iniciales. En la descripción de sus soluciones de la ecuación KdV, inventaron para el fenómeno de la onda solitaria una palabra que llegaría a ser de uso común: *solitón*.

El trío descubrió que los solitones podían evolucionar desde un estado inicial y viajar después hacia la derecha y hacia la izquierda hasta intercambiar sus posiciones relativas y volver a enfocarse, casi exactamente, en otro lugar del espacio. Este trabajo (y el de muchos investigadores posteriores) ha aportado múltiples avances, teoréticos y experimentales, en una miríada de campos de las matemáticas y de la física.

Mientras Zabusky, Kruskal y Deem andaban ocupados con el problema FPU, un físico-matemático japonés, Morikazu Toda, investigaba un problema no lineal parecido y demostraba matemáticamente que nunca llegaría a mostrar caos alguno. La cadena FPU encerraba, sin duda, grandes sutilezas.

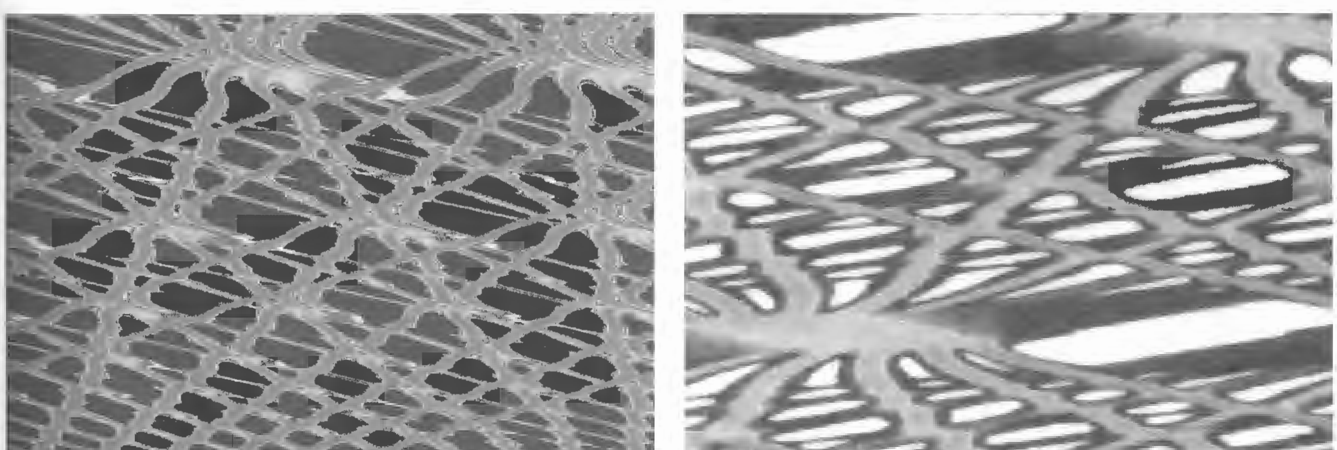
## ¿Lacayos del caos?

Las ondas solitarias pueden realmente engendrar comportamientos de una regularidad sorprendente, pero el movimiento de un sistema FPU puede también ser caótico en grado sumo. De hecho, incluso sistemas dinámicos muy sencillos pueden dar lugar a intrincadas combinaciones de comportamientos caóticos y regulares.

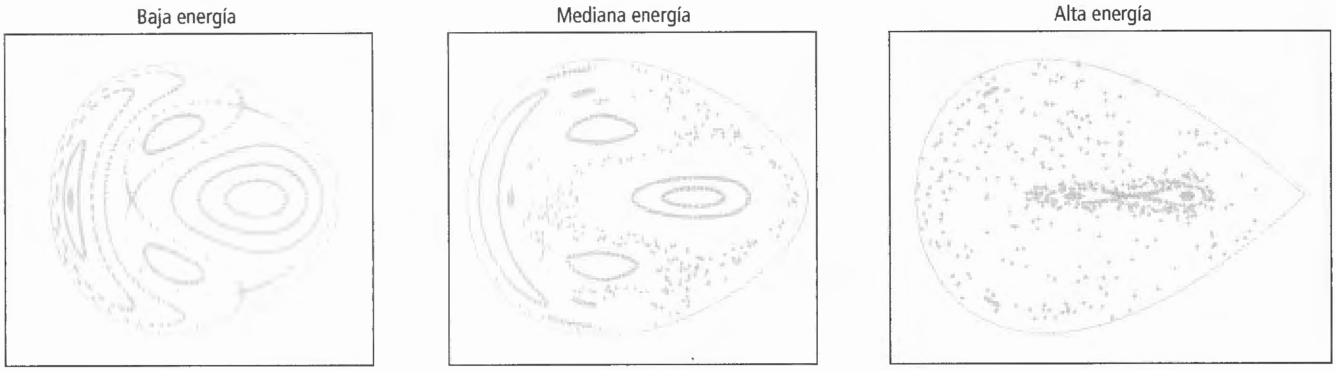
Estamos utilizando aquí el término *caótico* en su sentido científico. No se trata de aleatoriedad. El egreso de un problema FPU está regido por las leyes de Newton, que determinan inequívocamente todo movimiento futuro: no hay lugar para acontecimientos aleatorios. No obstante, al cabo de poco, los movimientos pueden parecer sumamente desordenados y erráticos. Además, el sistema de masas y muelles ofrece, luego de un lapso de tiempo, una enorme sensibilidad a las condiciones iniciales. Modifíquense éstas, por poco que sea, y transcurrido algún tiempo el resultado habrá sido completamente diferente.

Muchos sistemas —entre ellos, las variaciones atmosféricas responsables de los cambios meteorológicos— presentan esa propiedad; en consecuencia se los considera caóticos, a pesar de que su evolución a lo largo de un período breve pueda parecer razonablemente regular. De hecho, como hace ver el propio problema FPU, su movimiento, a lo largo de períodos de tiempo enormemente largos, ¡puede ser francamente regular!

Para determinar si (dadas ciertas condiciones iniciales) el movimiento de un determinado sistema es, a largo plazo, regular o caótico, resulta conveniente representar gráficamente la evolución del sistema en el transcurso del tiempo. La dificultad estriba en que incluso en un sistema dinámico de apariencia sencilla, que conste de una sola masa, hay que representar seis variables, a saber, tres coordenadas espacia-



**6. UN SISTEMA ANALOGO AL MODELIZADO por Fermi, Pasta y Ulam, pero compuesto esta vez por 256 masas (*a la izquierda*), origina solitones fácilmente. Estos pueden propagarse en cualquiera de las dos direcciones, intercambiar sus posiciones y acabar devolviendo el sistema a un estado similar al de su configuración inicial. Se puede apreciar en esta fotografía el movimiento de los solitones siguiendo las líneas de color cálido, que denotan grandes desplazamientos de las masas. El eje horizontal corresponde a la posición a lo largo de la serie de muelles y masas. El eje vertical corresponde al tiempo: comienza abajo y progresa en sentido ascendente. La aparición de solitones en propagación no exige que las masas sean discretas; se da también en analogías continuas del sistema Fermi-Pasta-Ulam (*a la derecha*).**




**7. LAS INTERACCIONES CAOTICAS hubieran contribuido a engendrar el reparto de energía que Fermi, Pasta y Ulam esperaban hallar. Pero no impartieron a su sistema la energía suficiente para que se diera la equipartición. La conexión con el caos puede ilustrarse con un sistema (matemáticamente equivalente a la cadena de tres masas de Fermi-Pasta-Ulam) estudiado por los astrónomos Michel Hénon y Carl Heiles en 1963. El comportamiento del sistema Hénon-Heiles se aprecia mejor mediante secciones de Poincaré, que muestran los puntos donde las trayectorias multidimensionales del sistema intersecan a un plano seleccionado. Al ir aumentando la energía total del sistema se observa una progresión desde trayectorias regulares (*a la izquierda*) hasta otras que reflejan tanto comportamientos regulares como caóticos (*centro*) y, finalmente, hasta trayectorias caóticas en su mayor parte (*a la derecha*).**

BARBARA AULICINO, ADAPTADO DE J. S. KOLE, 1999/*American Scientist*

les, $x$, $y$, $z$, y las correspondientes componentes (otras tres) de la velocidad en la dirección de cada uno de los tres ejes.

La representación de los seis valores correspondientes a esta masa en movimiento, conforme va trazando su trayectoria por el espacio, crea figuras visualmente embrolladas, de difícil interpretación. No obstante, si se representa sólo un subconjunto de puntos inteligentemente seleccionados (puntos que verifiquen, por ejemplo, una condición de interés físico, como la anulación de alguna de las componentes de la velocidad) resulta más sencillo interpretar lo que sucede. Tales representaciones se denominan "secciones de Poincaré" en honor del gran físico y matemático francés Jules Henri Poincaré.

Las trayectorias regulares son tan predecibles como las órbitas de los planetas o los atascos para ir al trabajo. Es posible irles siguiendo la pista a lo largo del tiempo con gran precisión. Por otra parte, las trayectorias caóticas propenden a ser sumamente irregulares. Tienden a vagabundear erráticamente, como un grupo de beodos; sólo están constreñidas por la energía de que disponen.

El caos reviste importancia en el problema FPU, porque si es suficiente, podría mezclar energías entre modos de oscilación. Esto es, en un sistema tal, el caos puede provocar la repartición de energía. Aunque ni FPU ni Tuck y Menzel habían observado equipartición, Zabusky y Deems, en su estudio de 1967, sí la apreciaron, tras realizar simulaciones de un sistema FPU para el cual los movimientos iniciales de las masas tenían pequeña longitud de onda y gran amplitud. En 2006 otros investigadores, en análisis y simulaciones de mayor alcance, confirmaron esta equipartición.

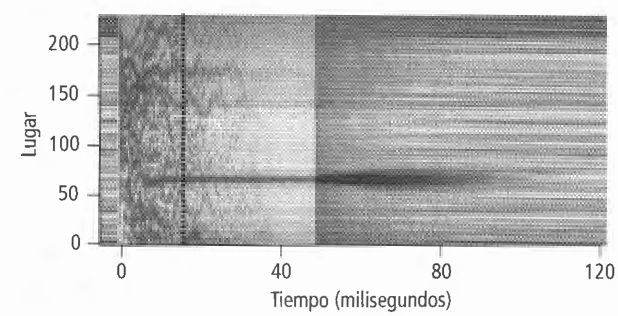
Eddie Cohen, de la Universidad Rockefeller, y varios colaboradores, prosiguiendo y desarrollando trabajos de Boris Chirikov sobre caos y equipartición energética, han investigado recientemente el sistema FPU a grandes energías. Al examinar esta cuestión sistemáticamente, demostraron la existencia de dos umbrales (expresados en función de la energía por oscilador) en la dinámica del sistema FPU. En el primer umbral, el movimiento pasa de ser completamente regular a débilmente caótico: se presenta cierto comportamiento caótico, pero las cosas siguen todavía desarrollándose con mucha regularidad durante una parte abrumadoramente grande del tiempo. Pero superado un segundo umbral, de energía más elevada, se instaura un caos vigoroso, que permite una rápida repartición de energía entre modos.

Cohen y sus colaboradores descubrieron también que la equipartición acontece más deprisa al aumentar el número de masas. Si el número de osciladores no lineales tiende a infinito (es decir, en las situaciones de la vida real que FPU deseaban modelizar), la equipartición se presenta, cualquiera que sea la energía que se le aporte al sistema. Las condiciones iniciales que FPU utilizaron en sus simulaciones numéricas se encontraban, sin embargo, por debajo del umbral del caos, lo que les impidió observar la equipartición de energía entre los diferentes modos de oscilación. FPU hubieran observado tal equipartición si hubieran supuesto, o bien no linealidades más intensas (que provocan interacciones más acusadas entre diferentes modos), o impulsos iniciales más energéticos. Hemos de agradecer que no lo hicieran, en vista del interés que suscitó su problema y las muchas enseñanzas extraídas del mismo.

Podemos observar un ejemplo en los estudios sobre la conducción del calor. (La transmisión del calor fue una de las cuestiones que movieron a FPU.) A comienzos del siglo XIX,

## Los autores

**Mason A. Porter**, doctorado por la Universidad Cornell en 2002, enseña matemática aplicada en el Colegio Somerville de la Universidad de Oxford. **Norman J. Zabusky**, que se doctoró en el Instituto de Tecnología de California en 1959, es profesor visitante en el departamento de física de la complejidad del Instituto Weizmann de Ciencias y profesor emérito en el departamento de ingeniería mecánica en la Universidad de Rutgers. **Bambi Hu**, doctor en 1974 por Cornell, da clases en el departamento de física de la Universidad de Houston. **David Campbell** se doctoró en la Universidad de Cambrigde en 1970, y ahora se halla adscrito al departamento de ingeniería eléctrica e informática de la Universidad de Boston. Los autores desean dedicar este artículo a Martin Kruskal (1925-2006), uno de los pioneros del estudio de las ondas solitarias.


**8. DURANTE MUCHOS AÑOS se creyó que las vibraciones de un retículo regular —los átomos de un cristal perfecto, por ejemplo— tenían que extenderse por el espacio. Pero hace unos veinte años, físicos y matemáticos se percataron de que ciertos sistemas no lineales pueden mantener vibraciones espacialmente localizadas. Tales *modos intrínsecamente localizados* (MIL), también llamados *discrete breathers* (respiradores individuales), han sido ya observados experimentalmente en algunos sistemas físicos. Uno de tales sistemas está compuesto por una serie de barras micromecánicas en voladizo (*a la izquierda*). Cuando una viga está vibrando, se produce una atenuación en la luz que refleja, como puede verse en la imagen (*a la derecha*), lo que permite rastrear la evolución del sistema. Transcurridas algunas decenas de milisegundos, la vibración de las barras queda localizada, con el resultado de una línea horizontal oscura.**

el matemático francés J. B. Joseph Fourier introdujo una sencilla ley fenomenológica para describir el flujo del calor en sólidos. Todavía, a pesar de los dos siglos transcurridos, sigue siendo imposible deducir la ley directamente, por aplicación de primeros principios. Las tentativas a tal fin se remontan, por lo menos, hasta los estudios realizados por Peter Debye en 1914 sobre la conducción de calor en cristales dieléctricos. Debye proponía que la conductividad finita de tales cristales es consecuencia de interacciones no lineales en las vibraciones de sus retículos moleculares: exactamente el mismo tipo de fenómeno para cuyo sondeo fue concebido el estudio FPU.

Ha sido mucho el trabajo sobre la conducción del calor que se ha realizado utilizando modelos del tipo FPU, en los que cada extremo de la cadena se hallaba sumergido en un "baño térmico" (frío el uno, caliente el otro) y en los que cada masa experimentaba fuerzas que se sumaban a las procedentes de sus vecinas. Se han utilizado estos modelos para examinar la dependencia de la conductividad del número de masas y cuánto es el caos que existe en el sistema. Aunque son muchos e importantes los conocimientos que se han podido obtener, se desconoce todavía un sistema completo de condiciones necesarias y suficientes que garanticen la validez de la ley de Fourier. A los físicos les encantaría poder resolver esta embarazosa situación.

## Respiradores

Decenios después, el problema FPU sigue inspirando estudios de sistemas no lineales no menos fascinantes; así, los retículos atómicos de la física de estado sólido. Hasta hace unos veinte años, se daba por seguro que las vibraciones de estos retículos habrían de extenderse a distancias muy grandes, en comparación con las distancias interatómicas. Las únicas excepciones reconocidas correspondían a defectos que destruían la regularidad de la disposición de los átomos en el retículo, debidos a contaminantes o a rupturas en un cristal, puro en todo lo demás. Se daba por sabido que tales irregularidades podrían provocar que las vibraciones no fuesen más que locales (a pesar de que trabajos anteriores de Zabusky y Deem apuntasen otra cosa).

Este enfoque quedó vuelto del revés por el descubrimiento de modos localizados de vibración en retículos perfectos. Tales modos, denominados *modos intrínsecamente localizados* (MIL) o, más coloquial y frecuentemente, *discrete breathers* —respiradores individuales—, pueden surgir en retículos espacialmente extendidos; en términos generales, desempeñan un papel similar al de los solitones en los sistemas físicos continuos. Empero, los MIL, a diferencia de los solitones, no tienen que propagarse: pueden limitarse a vibrar en un lugar. Hasta el presente, se han observado experimentalmente MIL en una variada colección de sistemas físicos, entre ellos sólidos de transferencia de carga, matrices de uniones Josephson, cristales fotónicos, estructuras micromecánicas oscilantes y condensados de Bose-Einstein.

¿Por que la no linealidad produce modos localizados de oscilación en un retículo? Para hacernos una idea, consideremos dos osciladores no lineales que interactúen débilmente. Recordemos que, debido a que esas oscilaciones son no lineales, la frecuencia de sus vibraciones depende de su energía. Imaginemos que uno de los osciladores es activado con una excitación fuerte y el otro con una débil, de suerte que casi toda la energía del sistema le corresponda en el arranque al primer oscilador. En teoría, podemos elegir estas excitaciones iniciales de manera que sus oscilaciones sean inconmensurables (haciendo que la razón de sus frecuencias de oscilación sea un número irracional). De proceder así, una vez lanzados ambos osciladores a sus amplitudes máximas, nunca podrían volver a entrar en sincronía. Ello impide que las vibraciones del primer oscilador (o cualquiera de sus frecuencias armónicas) resuenen con alguno de los modos del segundo oscilador, lo que torna muy difícil la transferencia de energía entre los osciladores.

Consideremos ahora una cadena, dotada de numerosos osciladores. Pongamos en vibración a uno de ellos con una amplitud bastante grande y a una frecuencia inconmensurable con las frecuencias de las vibraciones, de menor amplitud que están experimentando los demás osciladores. Ese oscilador especial tiene dificultad en transferir parte alguna de su energía a sus vecinos. Así pues, este oscilador, y tal vez un reducido número de sus vecinos, mantiene una oscilación de gran amplitud durante un largo período, originando un MIL.

En 1998, Albert Sievers (Universidad Cornell) y Shozo Takeno (Universidad Técnica de Kyoto) demostraron la posibilidad de que surjan MIL en un retículo FPU. Se ha seguido investigando esta idea; se han logrado desarrollos nuevos y apasionantes. En particular, Sergej Flach, del Instituto Max Planck de Física de Sistemas Complejos, y sus colaboradores, en una serie de artículos publicados desde 2005, están proporcionando un nuevo enfoque sobre las recurrencias FPU, que son, en su opinión, resultado de la existencia de objetos llamados *q-breathers*. Uno de los problemas de investigación más activos en ciencia no lineal consiste en reconciliar la metodología de Flach para comprender la dinámica FPU con la anterior concepción, basada en los solitones.

## En el horizonte

A lo largo del último medio siglo, en una miríada de investigaciones sobre el problema FPU y otros sistemas relacionados han ido tomando forma conceptos como los de caos, solitones y *breathers*, que han sido desarrollados, refinados y aplicados a cierto número de sistemas del mundo real.

El problema FPU incide en una gama de cuestiones de gran amplitud, concernientes a sistemas dinámicos no lineales, a la mecánica estadística y a la física computacional. No obstante, estas amplias categorías representan apenas una pequeña fracción de la bibliografía que el artículo FPU original ha engendrado. Se siguen publicando hoy nuevos estudios sobre el problema FPU, a pesar de los 54 años transcurridos desde aquel primer trabajo de Los Alamos. Tenemos plena confianza en que esta clase de estudios seguirá ocupando a los investigadores mucho después de que la ciencia celebre, en 2055, el centenario del problema FPU.

## Bibliografía complementaria


STUDIES OF NONLINEAR PROBLEMS. I. Report LA-1940. E. Fermi, J. R. Pasta y S. Ulam. Los Alamos Scientific Laboratory; Los Alamos, 1955.

INTERACTION OF 'SOLITONS' IN A COLLISIONLESS PLASMA AND THE RECURRENCE OF INITIAL STATES. N. J. Zabusky y M. D. Kruskal en *Physical Review Letters*, vol. 15, págs. 240-243; 1965.

Q-BREATHERS AND THE FERMI-PASTA-ULAM PROBLEM. S. Flach, M. V. Ivanchenko y O. I. Kanakov en *Physical Review Letters*, vol. 95, pág. 064102; 2005.

WEAK AND STRONG CHAOS IN FERMI-PASTA-ULAM MODELS AND BEYOND. A. Pettini, L. Casetti, M. Cerruti-Sola, R. Franzosi y E. G. D. Cohen en *Chaos*, vol. 15, pág. 015106; 2005.

ENCYCLOPEDIA OF NONLINEAR SCIENCE. Dirigida por A. Scott. Routledge. Taylor & Francis Group; Nueva York, 2005.

DISCRETE BREATHERS: ADVANCES IN THEORY AND APPLICATIONS. S. Flach y A. V. Gorbach en *Physics Reports*, vol. 467, págs. 1-116; 2008.

THE FERMI-PASTA-ULAM PROBLEM: A STATUS REPORT. Compilación de G. Gallavotti. Springer; Berlín, Nueva York, 2008.