Teorema de Bernstein-Cantor-Schröder

Teorema 1. *Sean X y Y conjuntos*

$$f : X \to Y, \quad g : Y \to X$$

.

inyectivas. Entonces existe $h : X \to Y$ biyectiva.

Demostración: Se define

$$\begin{array}{rccc} H: & \mathcal{P}(X) & \to & \mathcal{P}(X) \\ & A & \mapsto & X \setminus g\,(Y \setminus f(A)) \end{array}$$

Notemos que si f fuese sobreyectiva, entonces

$$H(X) = X \setminus g\,(Y \setminus f(X)) = X \setminus \emptyset = X.$$

Si g fuese sobyectiva, entonces

$$H(\emptyset) = X \setminus g\,(Y \setminus f(\emptyset)) = X \setminus X = \emptyset.$$

Por esto es natural buscar un "punto fijo" de H. Con este objetivo consideremos

$$\mathcal{H} = \{A \subset X\,;\, A \subset H(A)\}.$$

Observaciones:

1. Si A, $B \in \mathcal{H}$ entonces $A \cup B \in \mathcal{H}$.
2. Si $A \in \mathcal{H}$ entonces $H(A) \in \mathcal{H}$.

Sea

$$U = \bigcup_{A \in \mathcal{H}} A.$$

Por la observación 1, y dado que

$$H(U) = H\left(\bigcup_{A \in \mathcal{H}} A\right) = \bigcup_{A \in \mathcal{H}} H(A),$$

se tiene que $U \in \mathcal{H}$ y por consiguiente $U \subset H(U)$.

Por la observación 2, se tiene que $H(U) \in \mathcal{H}$. Por lo tanto $H(U) \subset U$.

Hemos demostrado que $H(U) = U$. Es decir $U = X \setminus g\,(Y \setminus f(U))$ o también

$$X \setminus U = g\,(Y \setminus f(U))\,.$$

Definimos

$$\begin{array}{rccl} h: & X & \to & Y \\ & x & \mapsto & h(x) = \left\{ \begin{array}{cl} f(x) & x \in U \\ y & x \in X \setminus U = g(Y \setminus f(U)),\ g(y) = x. \end{array} \right. \end{array}$$

Veamos que h es biyección. Para ver que es inyectiva, tomemos $x \neq x' \in X$. Si uno de ellos está en U y el otro en $X \setminus U$ entonces una de las imágenes está en $f(U)$ y la otra en $Y \setminus f(U)$ por consiguiente las imágenes serán distintas. Si $x \neq x' \in U$ entonces $h(x) = f(x) \neq f(x') = h(x')$ puesto que f es inyectiva. Si $x \neq x' \in X \setminus U = g\left(Y \setminus f(U)\right)$, como g es inyectiva, las pre-imágenes en $Y \setminus f(U)$ por medio de g de x, x' son distintas. Es decir $h(x) \neq h(x')$.

Para ver que h es sobreyectiva, dado $y \in Y = f(U) \cup (Y \setminus f(U))$ se tiene que si $y \in f(U)$, existe un único $x \in U$ tal que $y = f(x) = h(x)$. Si $y \in Y \setminus f(U)$ entonces $g(y) \in g\left(Y \setminus f(U)\right)$, y $y = h(g(y))$. ■

Como consecuencia del teorema de Bernstein-Cantor-Schröder se tiene,

Proposition 1. *X es enumerable si y solo si existe $h : X \to \mathbb{N}$ inyectiva.*

Demostración: La suficiencia es la definición de enumerabilidad. Veamos la necesidad. Supongamos que $h : X \to \mathbb{N}$ es inyectiva y consideremos $h(X) \subset \mathbb{N}$. Si $h(X)$ es un subconjunto finito de $\mathbb{N}$, tomamos $g : h(X) \to X$ definida por $g(y) = x$, donde x es el único elemento de X tal que $h(x) = y$. Entonces g es una biyección entre X y un conjunto finito y, por lo tanto, X es finito. Si $h(X)$ no es finito, se define la biyección $f : \mathbb{N} \to h(X)$ por recurrencia de la manera siguiente:

$$\begin{array}{ccccl} f(0) & = & n_0 & = & \min\{n\,;\, n \in h(X)\} \\ f(1) & = & n_1 & = & \min\{n\,;\, n \in h(X) \setminus \{n_0\}\} \end{array}$$

Una vez definidos $f(0) = n_0$, $f(1) = n_1, \ldots\ f(k) = n_k$ se define

$$f(k+1) = n_{k+1} = \min\{n\,;\, n \in h(X) \setminus \{n_0, n_1 \ldots n_k\}\}.$$

f es una biyección y $f^{-1} \circ g : X \to \mathbb{N}$ es una biyección. ■