

# El método Monte-Carlo y su aplicación a finanzas

Patricia Saavedra Barrera<sup>1</sup> y Víctor Hugo Ibarra Mercado <sup>2</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa,  
psb@xanum.uam.mx

<sup>2</sup>Escuela de Actuaría, Universidad Anáhuac. ESFM-IPN, vibarra@anahuac.mx



# Índice general

<b>1. Valuación de opciones por Monte-Carlo</b>	<b>7</b>
1.1. Introducción a las opciones . . . . .	7
1.2. Valuación de una opción europea. . . . .	9
1.3. El método Monte-Carlo . . . . .	11
1.4. Valuación de opciones asiáticas . . . . .	15
1.5. Esquemas numéricos . . . . .	18
1.6. Resultados de la simulación Monte Carlo . . . . .	20
1.7. Métodos de reducción de varianza: variable de control . . . . .	20
1.8. Resultados numéricos con reducción de varianza . . . . .	24
<b>2. Cálculo de la cobertura</b>	<b>27</b>
2.1. Cálculo de la cobertura para opciones europeas vainilla . . . . .	27
2.2. Cálculo de la cobertura por Monte-Carlo . . . . .	29
2.2.1. Cobertura de la opción asiática . . . . .	34
2.3. Cálculo de algunas griegas por Monte-Carlo . . . . .	36
2.3.1. Cálculo de las griegas para la opción asiática . . . . .	37
<b>A. Anexos</b>	<b>39</b>
A.1. Generadores de números aleatorios . . . . .	39
A.2. Pruebas para validar generadores de números aleatorios . . . . .	41
A.3. Generación de números aleatorios con otras distribuciones . . . . .	43
<b>B. Integración numérica por Monte-Carlo</b>	<b>49</b>
B.1. Integración numérica . . . . .	49
B.2. Integración múltiple . . . . .	52



# Introducción

La valuación y cobertura de las opciones es un tema que en los últimos veinte años ha adquirido una gran importancia. Las opciones vainilla tipo call se comenzaron a negociar en forma sistemática desde 1973 en el mercado de futuros de Chicago, las opciones put a partir de 1977 y las exóticas en 1982. A principios de los años noventa el mercado de opciones se estimaba en cuatro billones de dólares, ver [6].

El problema de la valuación puede ser analizado tanto desde un marco probabilístico como desde el punto de vista de las ecuaciones en derivadas parciales. Desde el probabilístico, valuar una opción se reduce al cálculo de una esperanza de una función continua aplicada a un proceso estocástico, mientras que determinar la cobertura implica el cálculo de la derivada de dicha esperanza. Para buena parte de las opciones la valuación y el cálculo de la cobertura no pueden hacerse en forma exacta, hay que aproximarlas por medio de métodos numéricos. Entre ellos, el más popular es el método de Monte-Carlo que consiste en aproximar la esperanza por medio de la media de una muestra de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

Estas notas tienen como objetivo introducir al lector a la valuación y cálculo de la cobertura tanto desde el punto de vista teórico como numérico. El énfasis está puesto en la parte numérica, presentando aspectos que son de interés para las aplicaciones, en particular en los aspectos de precisión y rapidez de los métodos. El material es autocontenido en lo que se refiere a la parte numérica. Se presupone que el lector tiene conocimientos de probabilidad, en particular de procesos estocásticos continuos, y de estadística elemental. Se incluyen algoritmos que podrán ser programados fácilmente en cualquier lenguaje de programación.

El primer capítulo se dedica a la valuación de opciones europeas y asiáticas, estas últimas como ejemplo de la valuación de opciones exóticas. En la última sección de este capítulo, se incluye un ejemplo de un método de reducción de varianza cuyo objetivo es reducir el tiempo de cálculo del método Monte-Carlo. El segundo capítulo trata el problema de la cobertura; se presentan dos métodos de cómo valuarla numéricamente. En los anexos se incluye un capítulo sobre la generación de variables aleatorias en computadora y la aproximación numérica de algunas ecuaciones diferenciales estocásticas y otro sobre Monte-Carlo como método de integración numérica.



# Capítulo 1

## Valuación de opciones por Monte-Carlo

### 1.1. Introducción a las opciones

Las opciones son derivados que son instrumentos financieros cuyo rendimiento depende de otro bien o activo. Por ejemplo, el valor de un bono depende de las tasas de interés y el de un petrobono del precio del petróleo. Otros derivados son los futuros, los forwards, los warrants, entre otros.

Una opción europea es un contrato entre dos partes para adquirir o vender un bien o un activo llamado subyacente a un precio y en una fecha fijados de antemano. A la fecha se le llama fecha de maduración y se denotará por  $T$  y al precio se le conoce como precio de ejercicio que se denotará por  $K$ . Si la opción es de compra se llama un call, si es de venta se llama un put. Las principales características de una opción son:

1. En una opción siempre hay dos partes: por un lado, quien compra la opción y por otro quien la suscribe.
2. El primero adquiere el derecho, pero no la obligación, de ejercer la opción en la fecha de maduración.
3. En cambio, la contra-parte se obliga a cumplir el contrato, independientemente de lo que convenga a sus intereses.
4. Para compensar esta asimetría y que el contrato sea justo para ambas partes, quien compra la opción le paga a quien la suscribe una prima que le permita cubrirse contra futuras pérdidas, debidas al cambio de precio del subyacente durante la vigencia de la opción.

Una opción puede negociarse en el mercado secundario por lo que es importante determinar su valor  $V_t$  para cada tiempo  $t \in [0, T]$ . En particular, la prima que se paga al adquirir la opción es igual al valor de la opción en el tiempo de la firma del contrato, consideremos que éste es el tiempo  $t = 0$ .

Denotemos con  $S_t$  el valor del subyacente al tiempo  $t$ . La ganancia que obtiene quien adquiere la opción se llama función de pago o pay-off y claramente depende del valor del subyacente. Denotemos a esta función como  $H$ . Para una opción call europea, la ganancia va a ser cero, si no se ejerce la opción, y va a ser igual a la diferencia entre el precio del subyacente y el precio de ejercicio, en caso de que se ejerza. Por lo que  $H : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ , con regla de correspondencia igual a

$$H(S) = \text{máx}\{S_T - K, 0\} = (S_T - K)_+$$

si la opción es un call e igual a

$$H(S) = \text{máx}\{K - S_T, 0\} = (K - S_T)_+$$

para un put.

Hay una gran variedad de opciones en el mercado y éstas se clasifican según su función de pago y la forma en que pueden ejercerse. Las opciones que tienen como función de pago a  $H$ , la función antes definida, se llaman opciones vainilla. Hay otras opciones llamadas exóticas cuya función de pago depende de la trayectoria que siga el precio del subyacente. Por ejemplo, entre las exóticas está la opción asiática cuya función de pago depende del promedio del subyacente a lo largo del tiempo de maduración.

O sea para un call se tiene que

$$H(S) = \text{máx} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T S(x) dx - K, 0 \right\}.$$

Otras opciones se distinguen por la forma en que se ejercen. Ya vimos que las europeas se ejercen únicamente en el tiempo de maduración. Las americanas pueden ejercerse en cualquier tiempo  $t \in [0, T]$ , mientras que la opción Bermuda sólo tiene un número finito de tiempos de ejercicio. El problema matemático a resolver para estas opciones es un poco distinto al de las europeas, pues al mismo tiempo que se valúan hay que determinar el momento óptimo de ejercerlas.

Por último, para todas las opciones debe determinarse también la estrategia óptima de inversión de la prima que debe seguir quien suscribe la opción, para que a la fecha de vencimiento su inversión sea igual al valor de la opción al tiempo  $T$ . A este problema se le conoce como el problema de la cobertura y es tan importante como el de la valuación.

### Marco teórico

1. Se tiene un espacio de probabilidad  $(\Omega, F, P)$ .
2. El mercado se compone de dos activos: uno libre de riesgo y otro con riesgo. El precio de un peso al tiempo  $t$  invertido a la tasa libre de riesgo  $r > 0$  se denotará por  $S_t^0 = e^{rt}$ . El precio del activo con riesgo o subyacente  $S_t$  es un proceso estocástico continuo en el intervalo  $[0, T]$  que satisface la siguiente ecuación

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t, \quad S_0 = S_0^*, \quad (1.1)$$

en donde  $\mu$  es la tendencia y  $\sigma > 0$  la volatilidad del subyacente,  $W_t$  es un browniano estándar.



3. Se pueden comprar o vender fracciones de activos.
4. No hay pago de dividendos ni costos de transacción.

### Observaciones:

1. El browniano es el límite de una caminata aleatoria cuando hacemos tender  $\Delta t$  a cero. Satisface que  $W_0 = 0$  y que los incrementos  $W_t - W_s$  son independientes y se distribuyen como una normal con media cero y varianza  $t - s$  para  $s \leq t$ .
2. La tendencia y la volatilidad dependen del subyacente y pueden ser estimadas a partir de datos históricos a través de la media y la desviación estándar muestral:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \ln \left( \frac{S_{i+1}}{S_i} \right),$$

y

$$\hat{\sigma} = \left( \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^{M-1} \left( \ln \left( \frac{S_{i+1}}{S_i} \right) - \hat{\mu} \right)^2 \right)^{1/2}. \quad (1.2)$$

## 1.2. Valuación de una opción europea.

Supóngase que se tiene una opción put con duración de 6 meses sobre una acción de Telmex con precio actual  $S_0 = 50$ , cuyo precio de ejercicio es  $K = 52$  y con volatilidad igual al 12% anual y tasa de interés libre de riesgo igual al 6% anual. ¿Cuál debe ser el valor de la prima del put para que la opción sea un contrato justo para ambas partes?

La ecuación diferencial estocástica

$$\begin{aligned} S(0) &= S_0, \\ \frac{dS}{S} &= \mu dt + \sigma dW_t, \end{aligned}$$

tienen como solución exacta a

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t}.$$

Por el teorema de Girsanov se puede asegurar que existe una única probabilidad  $P^*$ , equivalente a  $P$ , llamada probabilidad de riesgo neutro, para la cual el precio del subyacente es de la forma

$$S_t = S_0 \exp \left( \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t \right),$$

con  $B_t$ ,  $t \in T$ , un movimiento browniano dado por

$$B_t = W_t + \frac{(\mu - r)}{\sigma} t.$$

Bajo la probabilidad  $P^*$ ,  $\tilde{S}_t = \frac{S_t}{e^{rt}}$  es una martingala. Es decir,

$$E^*(\tilde{S}_{t+1} | \mathcal{F}_t) = \tilde{S}_t.$$

Este resultado implica que el valor de una opción europea también es una martingala y su valor está dado por

$$V_t = E^*(e^{-r(T-t)} H(S_T) | \mathcal{F}_t),$$

con  $H(S_T)$  la función de pago de la opción. Por lo que el valor de la opción europea vainilla  $V_t$  se obtiene por

$$\begin{aligned} V_t &= F(t, x) = E^*(e^{-r(T-t)} H(x e^{r(T-t)+\sigma(B_T-B_t)-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}) | \mathcal{F}_t). \\ V_t &= E^*(e^{-r(T-t)} H(S_t e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}})) \quad \text{con } y \sim N(0, 1), \\ V_t &= \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H(S_t e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}}) e^{-y^2/2} dy. \end{aligned}$$

Si  $H(S) = (S_T - K)_+$  entonces

$$F(t, S_t) = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2), \quad (1.3)$$

con

$$\begin{aligned} N(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy, \\ d_1 &= \frac{\ln(S_t/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \end{aligned}$$

y

$$d_2 = \frac{\ln(S_t/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

A la expresión (1.3) se le llama la fórmula de Black-Scholes.

Para obtener el valor de un put  $P_t$  se puede usar el mismo razonamiento o utilizar la siguiente igualdad que se conoce con el nombre de paridad put-call para opciones europeas

$$P_t - C_t = K e^{-r(T-t)} - S_t$$

con  $C_t$  el valor del call al tiempo  $t$ .

La existencia de la probabilidad de riesgo neutro permite asegurar que bajo el modelo de Black-Scholes hay ausencia de oportunidad de arbitraje (AOA), característica esencial que debe tener un mercado para ser justo. En el capítulo de la cobertura se tratará más ampliamente este punto.

### 1.3. El método Monte-Carlo

Se sabe por la Ley de los grandes números que un buen estimador del valor esperado de una variable aleatoria continua  $X$  con distribución  $F$  es la media aritmética de una muestra finita de variables aleatorias, independientes, con distribución  $F$ . Es decir, sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una muestra de variables aleatorias, independientes, con distribución  $F$ , con primero y segundo momentos finitos, y denotemos por

$$\tilde{X}_M = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i$$

entonces para cualquier  $\varepsilon > 0$  y  $0 < \delta < 1$ , existe un natural  $M$  tal que para toda  $m \geq M$  se tiene que

$$P(|E(X) - \tilde{X}_m| < \varepsilon) > 1 - \delta.$$

Esta es la idea que está detrás del método de Monte-Carlo y que se usa para estimar el valor esperado de una función  $g$  continua cuyo argumento es una variable aleatoria con distribución  $F$ . Si se tiene una muestra de variables aleatorias, independientes, idénticamente distribuidas con distribución  $F$ , entonces

$$E(g(X)) \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M g(X_i).$$

#### Estimación del error

Sea  $X$  una variable aleatoria con distribución  $F$ , con primero y segundo momento finitos,  $g$  una función continua y sea  $I = E(g(X))$ . Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una muestra de variables aleatorias independientes con distribución  $F$  y denótese por  $\hat{I}_M = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M g(X_i)$ . Si  $\sigma$  a la desviación estándar de  $g(X)$ , entonces se tiene que  $\frac{\sigma}{\sqrt{M}}$  es la desviación estándar de  $\hat{I}_M$ , por ser las  $X_i$  variables aleatorias independientes.

Por el Teorema Límite Central se sabe que para  $M$  grande,  $Z_M = \frac{(I - \hat{I}_M)}{\sigma/\sqrt{M}}$  se comporta como una variable aleatoria normal con media cero y varianza uno por lo que

$$P(|I - \hat{I}_M| < \frac{c\sigma}{\sqrt{M}}) = P(|Z_M| < c) \approx 2\Phi(c),$$

con  $\Phi(c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^c e^{-x^2/2} dx$  y  $c$  se selecciona dependiendo de la probabilidad que se desee obtener. Por ejemplo, si se quiere que la probabilidad sea .95, se selecciona a  $c$  como 1.96.

Por lo tanto el error que se comete al usar el método de Monte-Carlo es aproximadamente  $\frac{\sigma}{\sqrt{M}}$ . Como se observa, si  $\sigma \approx 1$ , se requiere de  $M = 10^4$  para tener al menos dos cifras significativas.

Este resultado permite estimar un intervalo de confianza de  $\alpha\%$ . Para ello se selecciona  $c$  de tal forma que  $\Phi(c) = \frac{\alpha}{2}$ . De esta manera, con probabilidad  $\alpha$  podemos asegurar que el valor exacto de la esperanza  $I$  está en el intervalo

$$\left[ \hat{I}_M - \frac{c\sigma}{\sqrt{M}}, \hat{I}_M + \frac{c\sigma}{\sqrt{M}} \right].$$

El problema para usar el resultado anterior es que hay que conocer el valor de la desviación estándar de  $g(x)$ . Lo que se hace en la práctica es estimarla por la varianza muestral dada por (1.2). Con este intervalo se determina el tamaño que se requiere que tenga  $M$  para tener la precisión deseada. Por ejemplo, si se desea tener un intervalo de confianza del 95 % de longitud  $10^{-2}$  se debe escoger  $M > (1.96)^2 \hat{\sigma}_g^2 10^4$ .

Desde el punto de vista estadístico el método de Monte-Carlo genera un estimador insesgado ya que  $E(\hat{I}_M) = I$ . Por otro lado, el error cuadrático medio se define por

$$E((I - \hat{I}_M)^2) = E(I - E(\hat{I}_M))^2 + Var(\hat{I}_M); \quad (1.4)$$

dado que el estimador es insesgado se tiene que

$$E((I - \hat{I}_M)^2) = Var(\hat{I}_M) \approx \frac{C\sigma^2}{M}.$$

Si se desea reducir el error cuadrático medio lo que hay que hacer es reducir  $\sigma$  o incrementar el tamaño  $M$  de la muestra de variables aleatorias. A veces el valor de  $M$  es tan grande que es costoso incrementar la muestra, por lo que se ha optado por generar métodos para reducir la varianza; estos métodos se conocen con el nombre de métodos de reducción de varianza. En la sección 1.7 se presenta un ejemplo de estos métodos.

## Aplicación de Monte-Carlo a la valuación de opciones europeas

En el caso de la valuación de opciones europeas, el método Monte-Carlo se usa para calcular la siguiente integral

$$V_t = E^*(e^{-r(T-t)} H(S_t e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}})),$$

con  $y$  una variable aleatoria normal con media cero y varianza uno.

Por el método de Monte-Carlo

$$V_t \approx \frac{e^{-r(T-t)}}{M} \sum_{i=1}^M H(S_t e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma y_i\sqrt{T-t}}),$$

con  $y_i$  una variable aleatoria normal con media cero y varianza uno. A continuación se presenta el algoritmo para generar esta aproximación y un intervalo de confianza del 95 %. El cálculo de la media y la varianza muestral se realiza en forma recursiva, ver [14].

### Algoritmo de Monte-Carlo

Para valuar una opción al tiempo  $t = 0$  o sea  $V_0$ , denotemos por  $Var_i$  a la varianza acumulada hasta la iteración  $i$ . Entonces dado  $S_0$ ,  $K$ ,  $r$ ,  $\sigma$  y  $T$  se hace lo siguiente:

1. Se inicializan las variables:  $Var_1 = 0$ ;  $\hat{V}_0 = 0$ ; y  $\hat{V}_1 = H(S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma y_1\sqrt{T}})$ , con  $y_1$  una normal con media cero y varianza uno. En el anexo A.3 se presenta cómo se genera una variable aleatoria con distribución normal con media 0 y varianza 1.

2. Para cada trayectoria  $i$ , con  $i = 2, \dots, M$  se hacen lo siguientes dos pasos:

a) Se genera una variable aleatoria  $y_i$  normal con media cero y varianza uno y se calcula

$$H_i = H \left( S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma y_i \sqrt{T}} \right).$$

b) Se calculan  $\hat{V}_i = \hat{V}_{i-1} + \frac{H_i - \hat{V}_{i-1}}{i}$ ,  $Var_i = (1 - \frac{1}{i-1})Var_{i-1} + i(\hat{V}_i - \hat{V}_{i-1})^2$ .

3.  $\hat{V}_M = e^{-rT} \hat{V}_M$ .

4. Se determina el intervalo de confianza del 95 %

$$V_0 \in \left[ \hat{V}_M - \frac{1.96\sqrt{Var_M}}{\sqrt{M}}, \hat{V}_M + \frac{1.96\sqrt{Var_M}}{\sqrt{M}} \right].$$

En la Figura 1.1 se presentan algunos resultados numéricos para el caso de un put con datos:  $K = 52$ ,  $S_0 = 50$ ,  $T = 6$  meses,  $r = 0.06$  y  $\sigma = 0.12$ ; el valor exacto del put es 1.9415. El intervalo de confianza se indica por [Lim. Sup, Lim. Inf] y se muestran los valores que se obtienen con Monte-Carlo para distintos valores de  $M$ . Obsérvese que el valor exacto se encuentra en todos los intervalos de confianza y que la longitud de dicho intervalo tiende a cero cuando  $M$  tiende a infinito.

$M$	Put	Lím. Sup.	Lím. Inf.	Long. Inter.
100	2.0498	1.5401	2.5595	1.0194
1000	2.0213	1.8604	2.1823	0.3219
10000	1.9509	1.9019	2.0000	0.0981
100000	1.9386	1.9230	1.9541	0.0311
1000000	1.9447	1.9398	1.9496	0.0098

Figura 1.1: Intervalo de confianza para Monte-Carlo

## Error cuadrático medio para MC aplicado a opciones europeas

Como se vio antes el error cuadrático medio (ECM) que se comete al estimar una esperanza de una variable aleatoria  $\theta = E(X)$  por medio del estimador  $\hat{\theta} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i$  de Monte-Carlo es igual a

$$E(\theta - \hat{\theta})^2 = E(\theta - E(\hat{\theta}))^2 + Var(\hat{\theta}),$$

con  $Var(\hat{\theta}) \approx \frac{\sigma_X^2}{M}$ .

Al usar Monte-Carlo para estimar el valor de una opción al tiempo  $V_t$  el error va a ser distinto si se utiliza el precio exacto del subyacente al tiempo  $T$  o si se aproxima su valor

por medio de un esquema numérico. El valor  $S_T$  se calcula en forma exacta a partir de  $S_t$  por

$$S_T = S_t e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma y_i \sqrt{T-t}} \quad \text{con } y_i \sim N(0, 1).$$

Si se calcula la opción por Monte-Carlo de la siguiente forma

$$\hat{V}_t = \frac{e^{-r(T-t)}}{M} \sum_{i=1}^M H \left( S_t e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma y_i \sqrt{T-t}} \right)$$

el estimador  $\hat{V}_t$  es insesgado y el error cuadrático medio está dado por

$$ECM(\hat{V}_t) = E((V_t - \hat{V}_t)^2) = Var(\hat{V}_t) \approx \frac{C}{M}.$$

Si se aproxima el valor del subyacente en  $T$  por medio de un esquema numérico, lo primero que hay que hacer es discretizar el intervalo de tiempo  $[0, T]$  de la siguiente forma: sea  $N \in \mathcal{N}$  y sea  $h = T/N$  y definamos  $t_0 = 0$ ,  $t_i = ih$  y  $t_N = T$ . El valor aproximado de  $S$  en los puntos  $t_i$  se generan por medio de un esquema numérico. Si el valor aproximado del subyacente que se obtiene con un esquema numérico se denota por  $S_i^h = S_{t_i}^h$ , entonces el estimador de Monte-Carlo es igual a

$$\hat{V}_t^h = \frac{e^{-r(T-t)}}{M} \sum_{j=1}^M H(S_N^{h,j}),$$

con  $S_N^{h,j}$  el valor al tiempo  $T$  de una posible trayectoria. El estimador  $\hat{V}_t^h$  ya no es insesgado ya que  $E(\hat{V}_t^h) \neq V_t$  por lo que el error cuadrático medio es igual a

$$ECM(\hat{V}_t^h) = E(V_t - E(\hat{V}_t^h))^2 + Var(\hat{V}_t^h).$$

En el caso de usar como esquema numérico el método de Euler se tiene que

$$S_i^h = (1 + rh)S_{i-1}^h + \sigma S_{i-1}^h y_i \sqrt{h}, \quad i = 1, \dots, N$$

con  $y_i$  una variable aleatoria normal con media 0 y varianza uno. El error cuadrático medio depende tanto de  $h$  como de  $M$  y el orden es igual a

$$ECM(\hat{V}_t^h) \approx C_1 h^2 + \frac{C_2}{M}$$

siempre que la función de pago sea continua. Nótese que en este caso el método es asintóticamente insesgado, o sea que tiende a cero cuando  $h$  tiende a cero.

Para ilustrar el comportamiento de Monte-Carlo con la aproximación del proceso por Euler se presenta en la Figura 1.2 resultados numéricos para el put vainilla europeo que se utilizó en la Figura 1.1 con  $h = 0.5, 0.05$  y  $0.005$ . El valor exacto es 1.9415.

Como se observa, cuando  $h = 0.5$ , el ECM es dominado por el valor de  $h$  por lo que no vale la pena utilizar valores más grandes de  $M$  para compensar el error de  $h$ ; al reducir la longitud del intervalo se excluye el valor exacto, como sucede para  $h = 0.5$  y  $M = 10^5$ . Conforme se reduce  $h$ , los valores mejoran y como era de esperarse la mejor aproximación se obtiene para  $h = 0.005$  y  $M = 10^5$  cuando  $h$  es más pequeño y  $h$  y  $1/M$  son del mismo orden.

	$h = 0.5$	Intervalo	$h = 0.05$	Intervalo	$h = 0.005$	Intervalo
$10^3$	1.8529	[1.693,2.013]	1.8905	[1.731,2.005]	1.8933	[1.74,2.057]
$10^4$	1.9187	[1.866,1.971]	1.9581	[1.907,2.009]	1.9287	[1.878,1.979]
$10^5$	1.8866	[1.870,1.903]	1.9461	[1.93,1.962]	1.9425	[1.926,1.959]

Figura 1.2: Estimación de un Put vainilla europea con MC-Euler

## 1.4. Valuación de opciones asiáticas

Las opciones europeas que se comentaron en la sección anterior, dependen sólo del valor que tiene el subyacente,  $S_t$ , en el instante que se ejerce. Por ejemplo, para el caso de una opción europea, si al final del tiempo de maduración el precio sufre un cambio fuerte, la opción cambiaría bruscamente de estar *in the money*<sup>1</sup> a estar *out the money*<sup>2</sup>. Una forma de evitar estos cambios repentinos en el precio de la opción, es suscribir un contrato sobre el valor promedio del precio del subyacente. Por otro lado, el hecho de que una opción esté basada en una media, reduce cualquier distorsión posible en los precios debida a la carencia de un mercado suficientemente amplio del subyacente. Quizá lo anterior sean las dos principales razones por las que la utilización de este tipo de opciones ha tenido un gran auge en el ámbito financiero en los últimos años.

El hecho de que el pago en el momento de ejercicio dependa de una media, posibilita muchos usos para este tipo de opciones. Por otro lado, debido a que fue el Banco Trust de Tokio la primera institución financiera que ofreció este tipo de opciones, se les denomina opciones asiáticas. Además como el precio no depende del precio spot sino del precio medio, son opciones dependientes de la trayectoria del precio del subyacente.

Existen diversos tipos de opciones asiáticas y se clasifican de acuerdo con lo siguiente.

1. La media que se utiliza puede ser aritmética o geométrica. La que más se utiliza en la actualidad es la media aritmética. Por otro lado, si la media utilizada es la geométrica el cálculo del precio de la opción es relativamente fácil de calcular.
2. Si la media se calcula para el precio del subyacente, entonces la opción se dice que tiene precio de ejercicio fijo. O bien, si la media se utiliza para el precio de ejercicio, entonces se dice que la opción tiene precio de ejercicio flotante.
3. Si la opción sólo se puede ejercer al final del tiempo del contrato se dice que es asiática de tipo europeo o *euroasiática*, y si puede ejercer en cualquier instante, durante la vigencia del contrato se denomina asiática de tipo americano.

Por lo anterior, básicamente los tipos de opciones euroasiáticas son:

<sup>1</sup>Para el caso de un call, quiere decir que el precio del subyacente es mayor que el precio de ejercicio.

<sup>2</sup>Para el caso del un call, quiere decir que el precio del subyacente es menor que el precio de ejercicio

- Call con precio de ejercicio fijo, con función de pago:  $(A - K)_+$ .
- Put con precio de ejercicio fijo, con función de pago:  $(K - A)_+$ .
- Call con precio de ejercicio flotante, con función de pago:  $(S - A)_+$ .
- Put con precio de ejercicio flotante, con función de pago:  $(A - S)_+$ .

En donde,  $A$  es el promedio del precio del subyacente. En caso de que el promedio sea aritmético, se tiene que:

$$A = \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt,$$

mientras que si el promedio es geométrico, entonces,

$$A = \exp\left(\frac{1}{T} \int_0^T \ln(S_t) dt\right).$$

Como se comentó antes, la valuación de opciones con media geométrica es relativamente sencilla, pero el hecho de que la media sea aritmética, plantea ciertas dificultades. La primera es que el valor de la opción depende de la trayectoria, por lo que si se utiliza un modelo de árbol binario, se deben tomar en cuenta todas las posibles trayectorias. Si se tienen  $n$  nodos, el número de trayectorias posibles es  $2^n$ , lo cual, para valores grandes de  $n$  se vuelve computacionalmente difícil de calcular.

La segunda es, en el marco de valuación de precios de Black y Scholes, que si el proceso de los precios del subyacente sigue un proceso de movimiento browniano geométrico, la media aritmética no se distribuye lognormal. De hecho, su distribución es muy complicada de caracterizar, véase Linetsky [13].

En esta parte, se abordará el caso de la opción euroasiática, que de aquí en adelante sólo se denominará opción asiática, y en particular se analizará el call asiático con precio de ejercicio fijo.

Se supondrá un único activo con riesgo, cuyo proceso de precios

$$\{S_t | t \in [0, T]\}$$

es un movimiento browniano geométrico, en un mercado que satisface las hipótesis del modelo de Black y Scholes [1]. Bajo estos supuestos, existe una medida de probabilidad,  $P^*$ , denominada *de riesgo neutro*, bajo la cual el precio del activo,  $S_t$ , satisface la ecuación diferencial estocástica.

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad 0 \leq t \leq T \tag{1.5}$$

en donde,  $S_0 > 0$ ,  $r$  la tasa libre de riesgo,  $\sigma$  la volatilidad,  $T$  el tiempo de maduración y  $\{W_t | t \in [0, T]\}$  es un movimiento browniano estándar.

Se sabe que la solución de (1.5) está dada por



$$S_{t_2} = S_{t_1} e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_2 - t_1) + (W_{t_2} - W_{t_1})\sigma} \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T. \quad (1.6)$$

Por otro lado, la función de pago para un call asiático de promedio aritmético y con precio de ejercicio fijo, está dado por

$$\max \{A(T) - K, 0\} = (A(T) - K)_+.$$

En donde,

$$A(x) = \frac{1}{x} \int_0^x S_u du$$

Por medio de argumentos de arbitraje se puede ver que el valor en el tiempo  $t$  de la opción call asiática está dado por

$$V_t(K) = e^{-r(T-t)} E^* [(A(T) - K)_+ | \mathcal{F}_t],$$

en donde, como ya se había dicho,  $P^*$  es la probabilidad de riesgo neutro. Y, como se demuestra en Wilmot [16], lo anterior se reduce a calcular

$$e^{-r(T-t)} E [(A(T) - K)_+].$$

Obsérvese que calcular el call en un tiempo posterior al que se inicia el cálculo del promedio, equivale a valuar una opción call como si se acabase de emitir, pero con un precio de ejercicio modificado.

Para el caso en que  $t_0 = 0$  y  $t = 0$  se tiene:

$$\begin{aligned} V_0(K) &= e^{-rT} E [(A(T) - K)_+], \\ V_0(K) &= e^{-rt} E \left[ \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_u du - K \right)_+ \right]. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Cuando no haya problema de ambigüedad, denotaremos a  $V_0(K)$  simplemente con  $V_0$ . La expresión (1.7) es la que se utilizará posteriormente para el cálculo del valor del call asiático con precio de ejercicio fijo.

Al igual que en el caso de las opciones estándar, no es restrictivo tratar sólo con el call, ya que el valor del put, con las mismas características, puede calcularse por medio de la paridad put-call para opciones asiáticas, véase [3], [13] o [2].

#### Paridad put-call para opciones asiáticas

$$\begin{aligned} e^{-rt} E \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - K \right)_+ - e^{-rt} E \left( K - \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt \right)_+ \\ = e^{-rt} E \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - K \right). \end{aligned}$$

Los métodos para calcular el precio de la opción se pueden agrupar en tres tipos, aquéllos que utilizan un modelo binomial (árboles binarios), los que plantean la solución de una ecuación diferencial parcial y los que utilizan métodos Monte Carlo. En la sección siguiente se presentan los esquemas que se utilizarán para la aproximación mediante el método Monte Carlo.

## 1.5. Esquemas numéricos

Con base en los resultados de la sección anterior, la expresión que se quiere calcular es

$$V_0 = e^{-rT} E \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_u du - K \right)_+, \quad (1.8)$$

la cual proporciona el valor de un call asiático con precio de ejercicio fijo.

Con objeto de hacerlo mediante el método Monte Carlo, es necesario que se calcule el promedio de  $S_u$ , en el intervalo  $[0, T]$ , y por tanto el valor de la integral en el mismo intervalo. Se debe notar que, como se está suponiendo que el precio del subyacente se rige por un movimiento browniano geométrico, entonces su valor se puede simular de manera exacta.

Se desarrollarán dos esquemas numéricos para aproximar el valor de

$$Y_T = \int_0^T S_u du. \quad (1.9)$$

Para lo dos esquemas se dividirá el intervalo  $[0, T]$  en  $N$  subintervalos de igual longitud,  $h = \frac{T}{N}$ , esto determina los tiempos  $t_0, t_1, \dots, t_{N-1}, t_N$ , en donde  $t_i = ih$  para  $i = 0, 1, \dots, N$ .

En el primer esquema numérico se tendrá como base las sumas de Riemann, ya que la aproximación se hará de acuerdo con

$$\int_0^T S_u du \approx h \sum_{i=0}^{n-1} S_{t_i}. \quad (1.10)$$

De este modo, si con el método de Monte Carlo se generan  $M$  trayectorias, entonces la aproximación estará dada por:

$$\widehat{V}_0^{(1)} = \frac{e^{-rT}}{M} \sum_{j=1}^M \left( \frac{h}{T} \sum_{i=0}^{N-1} S_{t_i} - K \right)_+.$$

Si en la ecuación anterior se sustituye  $h = \frac{T}{N}$  se obtiene

$$\widehat{V}_0^{(1)} = \frac{e^{-rT}}{M} \sum_{j=1}^M \left( \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} S_{t_i} - K \right)_+. \quad (1.11)$$

La ecuación (1.11) es el esquema 1 del método Monte Carlo que se utilizará para aproximar  $V_0$ .

Para obtener un segundo esquema, se aproxima (1.9) de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \int_0^T S_u du &= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} S_u du, \\ &\approx \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h}{2} [S_{t_i} + S_{t_{i+1}}], \\ &= \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ S_{t_i} + S_{t_i} e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)h + (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\sigma} \right\}. \end{aligned}$$

Se desarrolla en serie de Taylor y se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^T S_u du &\approx \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} S_{t_i} \left( 2 + \left( r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) h + (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\sigma \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \left( r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)^2 h^2 + 2 \left( r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) h (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\sigma \right. \\ &\quad \left. + (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 \sigma^2 \right\} + \dots \end{aligned}$$

Suponiendo que  $h$  es pequeña, sólo se conservan los términos de orden a lo más  $h$  y observando que debido a que la variación cuadrática de  $\frac{1}{2} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\sigma$  se cancela con  $-\frac{1}{2}\sigma^2 h$ , se obtiene

$$\int_0^T S_u du \approx \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{N-1} S_{t_i} (2 + rh + (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\sigma).$$

Con base en lo anterior, se tiene

$$\widehat{V}_0^{(2)} = \frac{e^{-rT}}{M} \sum_{j=1}^M \left[ \frac{h}{2T} \sum_{i=0}^{N-1} S_{t_i} (2 + rh + (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\sigma) - K \right]_+. \quad (1.12)$$

La relación 1.12 es el segundo esquema, que se empleará para aproximar  $V_0$  por el método Monte Carlo.

En la sección siguiente se muestran los resultados de las aproximaciones obtenidas con los esquemas dados en (1.11) y (1.12).

## 1.6. Resultados de la simulación Monte Carlo

Como caso de prueba, para la opción asiática, se seleccionó el de un call asiático con precio inicial,  $S_0 = 100$ , precio de ejercicio  $K = 100$ , tasa libre de riesgo  $r = 0.10$ , volatilidad  $\sigma = 0.20$  y  $T = 1$  año y el número de subdivisiones de 100. El precio es  $\approx 7.04$ , véase Lapeyre [11].

$S$	$K$	$r$	$\sigma$	$T$
100	100	0.1	0.20	1
M	Call	Lím. Sup	Lím. Inf.	Long. Inter.
1000	7.0716	6.5466	7.5966	1.0501
10000	7.0960	6.9273	7.2647	0.3373
100000	6.9903	6.9377	7.0429	0.1053
1000000	6.9768	6.9602	6.9934	0.0332

Figura 1.3: Resultados obtenidos al aplicar el esquema *sumas de Riemann*.

$S$	$K$	$r$	$\sigma$	$T$
100	100	0.1	0.20	1
M	Call	Lím. Sup	Lím. Inf.	Long. Inter.
1000	7.5005	6.9466	8.0544	1.1078
10000	7.1121	6.9426	7.2815	0.3389
100000	7.0197	6.9668	7.0726	0.1058
1000000	7.0435	7.0268	7.0603	0.0335

Figura 1.4: Resultados obtenidos al aplicar el esquema del *trapecio*.

Si se quiere aumentar la precisión, debe aumentarse el número de trayectorias en el método de Monte Carlo, y también el número de subintervalos de tiempo, con lo que el tiempo de computadora aumentaría de manera significativa; por lo que parece necesario utilizar algún método que reduzca la varianza de las aproximaciones obtenidas por los métodos anteriores. Eso es lo que se buscará hacer en el capítulo 4.

## 1.7. Métodos de reducción de varianza: variable de control

La principal desventaja el método Monte-Carlo es la lentitud con la que converge. La rapidez de convergencia depende de la relación  $\sigma/\sqrt{M}$ . Para acelerar la convergencia o se disminuye el valor de  $\sigma$  o se incrementa el número de trayectorias. Incrementar el número de trayectorias incide en el tiempo de cálculo computacional y en el uso de generadores aleatorios más sofisticados como las secuencias de baja discrepancia. Por otro lado, como

vimos en la primera sección, el error cuadrático medio de un estimador insesgado depende únicamente de la varianza del estimador. Por lo que reducir la varianza del estimador se ha convertido en el objetivo primordial para aquellos que quieren acelerar la convergencia de Monte-Carlo, sin incrementar su costo. Esto ha dado lugar a diversas técnicas entre las que destacan: variables de control, variables antitéticas, muestreo de importancia, por condicionamiento y por muestreo estratificado, entre otras. En este capítulo se presenta el método de variables de control y su aplicación a la estimación de la opción exacta. Para saber más de los otros métodos ver [4], [12] y [14].

## Método de variable de control

Este método consiste en encontrar otra variable que esté correlacionada con la variable de interés. Supongamos que  $X$  es una variable aleatoria, para la cual deseamos obtener una estimación de  $E(X)$ . Sea  $Y$  otra variable aleatoria, tal que  $E(Y)$  es conocida. Si definimos una tercer variable aleatoria  $Z$  por

$$Z = X + \beta[Y - E(Y)].$$

Entonces,  $E[Z] = E(X + \beta[Y - E(Y)])$ . Es fácil ver que:

$$E(Z) = E(X).$$

Pero,

$$Var(Z) = Var(X) + \beta^2 Var(Y) + 2\beta cov(X, Y).$$

Como se puede apreciar, la  $Var(Z)$  es una función cuadrática de  $\beta$ . El valor de  $\beta$ , llamémosle  $\beta^*$ , que minimiza el valor de  $Var(Z)$ , es

$$\beta^* = -\frac{cov(X, Y)}{Var(Y)}.$$

El valor mínimo está dado por

$$Var(X + \beta^*[Y - E(Y)]) = Var(X) - \frac{[cov(X, Y)]^2}{Var(Y)}. \quad (1.13)$$

La reducción relativa de la varianza la obtenemos, si dividimos la ecuación (1.13) entre  $Var(X)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{Var(X + \beta^*[Y - E(Y)])}{Var(X)} &= 1 - \frac{[cov(X, Y)]^2}{Var(X)Var(Y)} \\ &= 1 - [\rho(X, Y)]^2. \end{aligned}$$

En donde,  $\rho(X, Y)$  es el coeficiente de correlación entre  $X$  y  $Y$  y está dado por

$$\rho(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}.$$

La ecuación (1.13) nos dice que la reducción de varianza obtenida al emplear la variable de control  $Y$  es de  $100\rho^2(X, Y)\%$ .

Por lo regular, aunque  $E(Y)$  es conocida, los valores de  $Var(Y)$ , de  $cov(X, Y)$ , así como de  $Var(X)$ , no son conocidos, sino que se tienen que estimar a partir de los datos simulados.

Si tenemos  $M$  parejas de datos simulados,  $(X_i, Y_i), i = 1, 2, \dots, M$ , podemos emplear

$$\widehat{cov}(X, Y) = \sum_{i=1}^M \frac{(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{M - 1},$$

y

$$\widehat{Var}(Y) = \sum_{i=1}^M \frac{(Y_i - \bar{Y})^2}{M - 1},$$

como los estimadores de interés. Con esto podemos aproximar  $\beta^*$  por medio de  $\hat{\beta}^*$ , en donde

$$\hat{\beta}^* = -\frac{\widehat{cov}(X, Y)}{\widehat{Var}(Y)}.$$

Ahora bien, la varianza del estimador de  $Z = X + \beta^*[Y - E(Y)]$  está dada por

$$Var((\bar{X} + \beta^*[\bar{Y} - E(Y)])) = \frac{1}{n} \left( Var(X) - \frac{cov^2(X, Y)}{Var(Y)} \right).$$

## Aplicación a la valuación de opciones asiáticas

En el caso de las opciones asiáticas con media aritmética, se sabe que aunque el precio del subyacente tenga una distribución lognormal, la media aritmética tiene una distribución que sólo es tratable numéricamente, véase Linetsky [13]. Ahora bien, la media geométrica es una cota inferior para la media aritmética, y por otro lado su esperanza puede calcularse como se indica a continuación; por lo que se utilizará como nuestra variable de control.

El valor esperado de la variable de control es  $\tilde{V}_0 = e^{-rT} E \left[ e^{\left(\frac{1}{T} \int_0^T \ln(S_t) dt\right)} - K \right]_+$ .

Sustituyendo  $S_t = S_0 e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}$  en la ecuación anterior, tenemos

$$\tilde{V}_0 = e^{-rT} E \left[ \left( S_0 e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{T}{2} + \frac{\sigma}{T} \int_0^T W_t dt} - K \right)_+ \right].$$

Y como puede verse en Lamberton [10], se tiene que el valor de  $\tilde{V}_0$  está dado por

$$\tilde{V}_0 = e^{-\frac{1}{2} \left[ r + \frac{\sigma^2}{6} \right] T} S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2). \quad (1.14)$$

en donde,

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \frac{1}{2}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{\frac{T}{3}}},$$

$$d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{\frac{T}{3}}.$$

Con base en la sección anterior y de acuerdo con el método desarrollado por Kemna y Vorst [7], en el que proponen aproximar  $\frac{1}{T}\int_0^T S_u du$  por medio de  $e^{\frac{1}{T}\int_0^T \ln(S_u)du}$ . Estas dos variables aleatorias esperamos que sean similares, para valores de  $r$  y  $\sigma$  no demasiado grandes. De hecho la segunda, que es una media geométrica continua, es una cota inferior para la primera.

Es fácil ver que la variable aleatoria  $e^{\frac{1}{T}\int_0^T \ln(S_u)du}$  tiene una distribución normal y su esperanza está dada por,

$$E\left[e^{-rT}\left(e^{\frac{1}{T}\int_0^T \ln(S_u)du} - K\right)_+\right] = e^{-\frac{1}{2}\left[r + \frac{\sigma^2}{6}\right]T} S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2),$$

que tiene una forma del estilo de la fórmula de Black y Scholes.

Por lo tanto, podemos emplear como variable de control a la variable aleatoria  $Z$ , definida por

$$Z = e^{-rT}\left(e^{\frac{1}{T}\int_0^T \ln(S_u)du} - K\right)_+.$$

Ahora bien, como podemos sustituir  $S_t$  por  $S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)u + \sigma W_u}$ , al hacer esto en la ecuación anterior, tenemos

$$Z = e^{-rT}\left(e^{\frac{1}{T}\int_0^T \ln\left(S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)u + \sigma W_u}\right)du} - K\right)_+,$$

$$Z = e^{-rT}\left(e^{\frac{1}{T}\left[\int_0^T \ln(S_0)du + \int_0^T \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)udu + \sigma \int_0^T W_u du\right]} - K\right)_+,$$

$$Z = e^{-rT}\left(S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{T}{2} + \frac{\sigma}{T}\int_0^T W_u du} - K\right)_+.$$

Se debe notar que la variable de control se calcula con la misma trayectoria del movimiento browniano, que ya se utilizó para la variable  $S_t$ . Por lo que debemos adaptar cada uno de los esquemas para simular la variable de control.

Entonces, los esquemas para la aproximación de la variable de control  $Z$  quedan de la manera siguiente:

$$Z_T^{R,n} = e^{-rT}\left(S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{T}{2} + \frac{\sigma}{T}\sum_{k=0}^{n-1} h W_{t_k}} - K\right)_+, \quad (1.15)$$

$$Z_T^{T,n} = e^{-rT}\left(S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{T}{2} + \frac{\sigma}{T}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{h}{2}(W_{t_k} + W_{t_{k+1}})} - K\right)_+. \quad (1.16)$$

En cada uno de los cuales utilizamos el mismo tipo de aproximación para  $\int_0^T W_u du$  que para  $\int_0^T S_u du$ .

En la siguiente sección se presentan los resultados de las aproximaciones obtenidas al aplicar los esquemas anteriores.

## 1.8. Resultados numéricos con reducción de varianza

A continuación se muestran los resultados que se obtuvieron para el caso de prueba, un call asiático con precio de ejercicio fijo y la técnica de reducción de varianza, para aproximar su valor, los resultados se presentan redondeados a cuatro decimales. Las características de este call son:  $S_0 = 100$ ,  $K = 100$ ,  $r = 10\%$ ,  $\sigma = 20\%$  y  $T = 1$ , el número de subdivisiones en el tiempo es de 100. El valor aproximado de este call es 7.04.

M	Call	Lím. Sup	Lím. Inf.	Long. Inter.
100	7.0179	6.9774	7.0583	0.0809
1000	7.0185	7.0031	7.0339	0.0308
10000	7.0152	7.0104	7.0200	0.0096
100000	7.0173	7.0158	7.0189	0.0031

Figura 1.5: Resultados obtenidos al aplicar el esquema *sumas de Riemann*, con reducción de varianza.

En este esquema, aunque la longitud del intervalo se reduce considerablemente, comparado con la tabla de la Figura 1.5, los intervalos de confianza, no “atrapan” al valor verdadero.

M	Call	Lím. Sup	Lím. Inf.	Long. Inter.
100	7.0584	7.0124	7.1043	0.0918
1000	7.0414	7.0256	7.0572	0.0317
10000	7.0421	7.0371	7.0471	0.0100
100000	7.0438	7.0422	7.0454	0.0032

Figura 1.6: Resultados obtenidos al aplicar el esquema del *trapecio* con reducción de varianza.

Es interesante notar que en este esquema, la longitud del intervalo para 1000 trayectorias de Monte Carlo es le mismo orden que el de 100,000 para el método sin reducción de varianza, véase la tabla de la Figura 1.6 Los resultados anteriores se obtuvieron con la implementación del algoritmo siguiente para el cálculo del valor de la opción asiática,

$$I = V_0 = e^{-rT} E \left[ \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_u du - K \right)_+ \right].$$



**Algoritmo Monte-Carlo con reducción de varianza para valorar una opción call asiática con precio de ejercicio fijo.**

Denotemos con:

$X_i$  al valor obtenido para la opción mediante el esquema (1.11) con la trayectoria  $i$ .

$Y_i$  al valor obtenido para la variable de control mediante el esquema (1.15) con la trayectoria  $i$ .

$\tilde{X}_i, \tilde{Y}_i$  las medias aritméticas del valor de la opción y de la variable de control, respectivamente, hasta la iteración  $i$ .

$VarX_i, VarY_i$  y  $CovXY_i$  a la varianza del valor de la opción, la varianza de la variable de control y la covarianza entre estas variables, respectivamente, hasta la iteración  $i$ .

1. Entrada: Valor inicial del subyacente  $S_0$ , precio de ejercicio  $K$ , tiempo de maduración  $T$ , la tasa libre de riesgo  $r$ , volatilidad anual  $\sigma$ .
2. Inicializar valores:  $\tilde{X}_0 = 0, VarX_1 = 0, VarY_1 = 0$  y  $CovXY_1 = 0$ .
3. Calcular  $\tilde{X}_1$  con el esquema (1.11) y  $\tilde{Y}_1$  mediante el esquema (1.15)
4. Hacer  $\tilde{X}_1 = X_1$  y  $\tilde{Y}_1 = Y_1$ .
5. Para cada trayectoria  $i$ , con  $i = 2, \dots, M$ 
  - a) Calcular  $X_i, Y_i$ .
  - b) Calcular  $\tilde{X}_i = \tilde{X}_{i-1} + \frac{X_i - \tilde{X}_{i-1}}{i}$ ,  $\tilde{Y}_i = \tilde{Y}_{i-1} + \frac{Y_i - \tilde{Y}_{i-1}}{i}$ .
  - c) Calcular  $VarX_i = (1 - \frac{1}{i-1}) VarX_{i-1} + i (\tilde{X}_i - \tilde{X}_{i-1})^2$ .
  - d) Calcular  $VarY_i = (1 - \frac{1}{i-1}) VarY_{i-1} + i (\tilde{Y}_i - \tilde{Y}_{i-1})^2$ .
  - e) Calcular  $CovXY_i = (1 - \frac{1}{i-1}) CovXY_{i-1} + \frac{1}{i} (X_i - \tilde{X}_{i-1}) (Y_i - \tilde{Y}_{i-1})$ .
6. Actualizar los valores de  $\tilde{X}_M, \tilde{Y}_M, VarX_M, VarY_M$  y  $CovXY_M$ , “trayéndolos” a valor presente.
7. Calcular  $EY$  mediante la fórmula (1.14) y  $\beta = \frac{CovXY_M}{VarY_M}$ .
8. Calcular  $Z_M = \tilde{X}_M + \beta(\tilde{Y}_M - EY)$  y  $VarZ_M = VarX_M - \frac{(CovXY_M)^2}{VarY_M}$ .
9. Se determina el intervalo de confianza del 95 %

$$I \in \left[ \tilde{Z}_M - \frac{1.96\sqrt{VarZ_M}}{\sqrt{M}}, \tilde{Z}_M + \frac{1.96\sqrt{VarZ_M}}{\sqrt{M}} \right].$$



# Capítulo 2

## Cálculo de la cobertura

En este capítulo se tratará el tema de la cobertura que consiste en calcular, al tiempo  $t = 0$ , la estrategia de inversión que debe seguir quien suscribe la opción para que, a la fecha de vencimiento, la prima de la opción sea igual al valor de la opción al tiempo  $T$ . En el caso de una opción vainilla europea es posible determinar en forma exacta la cobertura; la primera sección se ocupa de este punto. Dado que para varias opciones exóticas no es posible calcular en forma exacta la cobertura, en la sección dos se presenta la aproximación por Monte-Carlo por dos métodos distintos: diferencias finitas y el método *pathwise-derivative*. Por último, en la tercera sección se presenta el cálculo numérico de las griegas que son funciones que miden la sensibilidad del valor de la opción a variaciones en los parámetros como la volatilidad, la tasa de interés y el tiempo.

### 2.1. Cálculo de la cobertura para opciones europeas vainilla

En esta sección se considera que se cumplen las hipótesis del modelo de Black-Scholes, en particular, que el mercado se compone de un activo sin riesgo y otro con riesgo. En este mercado, un portafolio consiste en un capital invertido en los activos antes mencionados. El monto invertido en el activo sin riesgo al tiempo  $t$  se denota por  $\phi_t^0$  y por  $\phi_t$  el número de acciones que se adquieren del subyacente. A la pareja  $\{\phi_t^0, \phi_t\}$  se le conoce como estrategia de inversión y se supone que es una sucesión de variables aleatorias  $F_t$  medibles.

Recordemos que para cada  $t > 0$ ,  $\phi_t^0$  y  $\phi_t$  toman valores en los reales. El valor del portafolio al tiempo  $t$  se denota por  $\pi_t$  y es igual a

$$\pi_t = \phi_t^0 e^{rt} + \phi_t S_t. \quad (2.1)$$

Supongamos que el portafolio es autofinanciable; es decir, después del tiempo inicial no se mete ni se saca dinero del portafolio hasta el tiempo  $T$ . Los cambios en el valor del portafolio dependen únicamente del cambio en la composición del mismo y en los cambios en el precio del subyacente. Esto se expresa matemáticamente por

$$d\pi_t = r\phi_t^0 e^{rt} dt + \phi_t dS_t. \quad (2.2)$$

Como se vio en el capítulo anterior para el modelo de Black-Scholes existe una única probabilidad  $P^*$ , equivalente a  $P$ , bajo la cual los precios descontados del subyacente son martingala. Las consecuencias de esto son muy importantes ya que el primer teorema fundamental de la valuación de activos permite afirmar que en el modelo de Black-Scholes hay ausencia de oportunidad de arbitraje. Según Shreve [15] esto quiere decir que no existe un portafolio  $\pi_t$  que satisfaga que  $\pi_0 = 0$  y que, para alguna  $t > 0$ , se cumpla

$$P\{\pi_t \geq 0\} = 1, \quad P\{\pi_t > 0\} > 0.$$

La unicidad de la probabilidad de riesgo neutro implica que el mercado es completo, lo que quiere decir, en el caso de las opciones, que para cualquier opción europea con fecha de vencimiento  $T$  se puede construir un portafolio autofinanciable  $\pi_t$  cuyo valor en cualquier tiempo  $t \in [0, T]$  coincida con el de la opción. Es decir

$$V_t = \pi_t. \quad (2.3)$$

A  $\pi$  se le llama el portafolio que replica a la opción  $V$ .

Por lo tanto, el problema de la cobertura está en principio resuelto, pero falta determinar el valor de la estrategia de inversión para cada  $t$ . Para ello, se aplica la fórmula de Ito a la función  $V$ , suponiendo que esta función tiene la regularidad necesaria

$$dV(t, S) = \left( \frac{\partial V(t, S)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V(t, S)}{\partial S^2} \right) dt + \frac{\partial V(t, S)}{\partial S} dS.$$

Substituyendo que  $S$  satisface la ecuación diferencial estocástica del proceso del browniano geométrico, ver (1.1), se tiene que

$$dV(t, S) = \left( \frac{\partial V(t, S)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V(t, S)}{\partial S^2} + \mu S \frac{\partial V(t, S)}{\partial S} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V(t, S)}{\partial S} dW_t. \quad (2.4)$$

Por otro lado, como  $d\pi = dV$  entonces al igualar (2.4) y (2.2) se obtienen dos ecuaciones, una para la parte determinista y otra que depende del browniano.

$$\frac{\partial V(t, S)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V(t, S)}{\partial S^2} + \mu S \frac{\partial V(t, S)}{\partial S} = r\phi_t^0 e^{rt} + \mu S \phi_t \quad (2.5)$$

$$S\sigma \frac{\partial V(t, S)}{\partial S} = S\sigma \phi_t.$$

Esta última implica que

$$\phi_t = \frac{\partial V(t, S)}{\partial S}. \quad (2.6)$$

En consecuencia, hay que adquirir en el tiempo  $t$ ,  $\frac{\partial V(t, S)}{\partial S}$  acciones del subyacente. El valor de  $\phi_t^0$  se encuentra al substituir  $\phi_t$  en la ecuación (2.1) y al usar que  $V_t = \pi_t$ . Al despejar  $\phi_t^0$  se obtiene

$$\phi_t^0 = \left( V_t - \frac{\partial V(t, S)}{\partial S} S_t \right) e^{-rt}.$$

De esta forma se determina la estrategia de inversión del portafolio replicante que es lo que se llama la cobertura de la opción, ya que permite a quien suscribe la opción de cubrirse de las variaciones en el precio del subyacente.

Si sustituimos el valor de  $\phi_t$  en la ecuación (2.5) y se cancelan los términos iguales se obtiene la ecuación

$$\frac{\partial V(t, S)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V(t, S)}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V(t, S)}{\partial S} - rV(t, s) = 0,$$

que se conoce con el nombre de la ecuación de Black-Scholes. Esta ecuación en derivadas parciales, junto con condiciones finales y de frontera adecuadas, permite calcular el valor de la opción sin el cálculo de una esperanza. Obsérvese que esta ecuación es totalmente determinista, para conocer más sobre este enfoque consultar [16].

## Cálculo de las griegas

La función  $\frac{\partial V(t, S)}{\partial S}$  mide también la sensibilidad del valor de la opción a variaciones en el precio del subyacente. El estudio de qué tan sensible es el valor de la opción a las variaciones de las variables y de los parámetros es una forma de medir el riesgo de la opción. A este estudio se le conoce con el nombre de cálculo de las griegas, porque se usan las letras griegas para denotarlas. A  $\frac{\partial V(t, S)}{\partial S}$  se le conoce como la delta al tiempo  $t$  y se denota por  $\Delta_t$ .

En el caso de las opciones vainilla europeas se puede calcular en forma exacta el valor de  $\Delta_t$  simplemente derivando con respecto a  $S$  la fórmula de Black-Scholes. De esta forma se obtiene que para un call  $\Delta_t = N(d_1)$  y para un put es  $\Delta_t = N(d_1) - 1$ .

Se listan a continuación otras derivadas importantes

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V(t, S)}{\partial S^2} \quad Vega = \frac{\partial V(t, S)}{\partial \sigma},$$

$$\rho = \frac{\partial V(t, S)}{\partial r}, \quad \Theta = \frac{\partial V(t, S)}{\partial t}.$$

## 2.2. Cálculo de la cobertura por Monte-Carlo

Para determinar tanto la cobertura como la griegas hay que calcular la derivada de un valor esperado respecto a una variable  $\theta$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} E^*(Y(S_T(\theta))),$$

con  $Y$  la función de pago descontada.

Hay muchas formas de calcular numéricamente esta derivada, la más sencilla es aproximar la derivada por diferencias finitas, sin embargo este enfoque tiene la desventaja de generar un estimador que no es insesgado. Otro método se obtiene al considerar que el cálculo de una esperanza de una variable aleatoria continua es el cálculo de una integral.

Bajo ciertas condiciones, la derivada de una integral se puede intercambiar por la integral de una derivada, lo que evita aproximar la derivada y permite generar estimadores insesgados. Esta idea da lugar al método *pathwise-derivative*. A continuación se presentan ambos enfoques.

## Diferencias finitas

Una forma de aproximar la derivada es por medio de un cociente de diferencias finitas. Hay muchas formas de construir este cociente; por ejemplo, la más sencilla es con diferencias finitas hacia adelante

$$\frac{dV(\theta)}{d\theta} \approx \frac{V(\theta + h) - V(\theta)}{h}.$$

Si denotamos por

$$\hat{Y}(\theta + h) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M Y(S_T^i(\theta + h)) \quad \text{y} \quad \hat{Y}(\theta) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M Y(S_T^i(\theta)),$$

entonces combinando Monte-Carlo con diferencias finitas hacia adelante da lugar al siguiente estimador

$$\hat{\Delta}_F = \frac{[\hat{Y}(\theta + h) - \hat{Y}(\theta)]}{h}.$$

El valor esperado de este estimador es igual a

$$E(\hat{\Delta}_F) = \frac{V(\theta + h) - V(\theta)}{h}.$$

Si  $V$  es tres veces diferenciable respecto a  $\theta$ , por el teorema de Taylor, se obtiene que

$$V(\theta + h) = V(\theta) + h \frac{dV(\theta)}{d\theta} + h^2 V''(\theta) + o(h^2)$$

lo que nos permite probar que el estimador no es insesgado ya que

$$E(\hat{\Delta}_F) - \frac{dV(\theta)}{d\theta} = V''(\theta)h + o(h).$$

Este error puede reducirse si en lugar de usar diferencias finitas hacia adelante se utilizan diferencias finitas centradas

$$\hat{\Delta}_c = \frac{\hat{Y}(\theta + h) - \hat{Y}(\theta - h)}{2h}.$$

En este caso, si  $V$  es cuatro veces diferenciable

$$E(\hat{\Delta}_c) - \frac{dV(\theta)}{d\theta} = \frac{1}{6} V'''(\theta)h^2 + o(h^2).$$

El estimador sigue siendo no insesgado, pero el orden del error es más pequeño. Por otro lado, ambos errores tienden a cero cuando  $h$  tiende a cero, por lo que son estimadores asintóticamente insesgados.

Por lo que respecta a la varianza del estimador se tiene que

$$Var(\hat{\Delta}_F) = \frac{Var(\hat{Y}(\theta + h) - \hat{Y}(\theta))}{h^2} = \frac{Var(Y(\theta + h) - Y(\theta))}{Mh^2}.$$

El numerador puede, a su vez, depender de  $h$ ; la dependencia está en relación de la forma en que se generen  $Y(S_T(\theta + h))$  y  $Y(S_T(\theta))$ . Si son variables independientes

$$Var(Y(\theta + h) - Y(\theta)) \approx 2Var(Y(\theta)).$$

Si son dependientes, por ejemplo se usan los mismos números aleatorios para generarlas,

$$Var(Y(\theta + h) - Y(\theta)) \approx Ch.$$

En ambos casos cuando  $h$  tiende a cero la varianza del estimador se incrementa. Y este es el principal inconveniente de combinar diferencias finitas con Monte-Carlo.

Ilustremos este comportamiento con la estimación de  $\Delta_t$  para la opción put europea al tiempo  $t = 0$ . En este caso  $\theta = S_0$  y se usarán los mismos números aleatorios para generar  $S_T(S_0)$  y  $S_T(S_0 + h)$ . Es decir,

$$S_T(S_0) = S_0 e^{(r - \sigma^2/2)T - \sigma y \sqrt{T}} \quad y \quad S_T(S_0 + h) = (S_0 + h) e^{(r - \sigma^2/2)T - \sigma y \sqrt{T}},$$

con  $y$  normal con media 0 y varianza uno. El algoritmo que se usa es el siguiente:

### Algoritmo Monte-Carlo-diferencias finitas para valorar delta

Dado  $S_0$  y  $h$ , para valorar delta  $\Delta_F$ , al tiempo  $t = 0$ , se realizan los siguientes pasos:

1. Se inicializan las variables:  $V_0 = 0$  y  $Var_0 = 0$ .
2. Para cada trayectoria  $i$ , con  $i = 1, \dots, M$  se calculan

a)

$$Y_i = (K - S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma z_i \sqrt{T}})_+,$$

y

$$X_i = (K - (S_0 + h) e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma z_i \sqrt{T}})_+,$$

con  $z_i$  una normal con media cero y varianza uno.

b) Se calcula  $V_i = V_{i-1} + \frac{(X_i - Y_i) - V_{i-1}}{i}$ .

c) Si  $i > 1$  se calcula  $Var_i = (1 - \frac{1}{i-1})Var_{i-1} + (i)(V_i - V_{i-1})^2$ .

3. Se calcula

$$\hat{\Delta}_F = \frac{1}{h} [e^{-rT} V_M].$$

4. Un intervalo de confianza del 95 % para  $\Delta$  está dado por

$$\Delta \in \left[ \hat{\Delta}_F - \frac{1.96\sqrt{Var_M}}{\sqrt{M}}, \hat{\Delta}_F + \frac{1.96\sqrt{Var_M}}{\sqrt{M}} \right].$$

La siguiente Figura 2.1 muestra, para distintos valores de  $M$  y  $h$ , el valor aproximado de delta cuando se usa Monte-Carlo con diferencias finitas (MC-DF) hacia adelante, para distintos valores de  $h$  y  $M$ . Los datos son los siguientes: Un put europeo vainilla con  $K = 52$ ,  $S_0 = 50$ ,  $T = 6$  meses,  $r = 0.06$  y  $\sigma = 0.12$ . El valor exacto de  $\Delta$  es  $-0.526466$ .

$M/h$	0.1	Intervalo	0.01	Intervalo	0.001	Intervalo
1000	-0.499	[-0.529,-0.469]	-0.524	[-0.554,-0.494]	-0.550	[-0.580,-0.520]
10000	-0.516	[-0.525,-0.506]	-0.521	[-0.531,-0.512]	-0.525	[-0.534,-0.515]
100000	-0.522	[-0.525,-0.519]	-0.522	[-0.525,-0.519]	-0.527	[-0.530,-0.524]
1000000	-0.522	[-0.523,-0.521]	-0.526	[-0.527,-0.525]	-0.527	[-0.528,-0.526]

Figura 2.1: Estimación de Delta por MC-DF

Observemos que el error cuadrático medio depende de  $h$  y  $M$ ; no es posible corregir el error que se introduce al tomar una  $h$  grande incrementando el número de trayectorias. Las mejores aproximaciones se obtienen cuando  $h = 0.01$ ,  $M = 100000$ , y  $h = .001$ ,  $M = 100000$ . Esto quiere decir que no vale la pena hacer menor el valor de  $h$  para obtener una mejor aproximación. Se puede probar que hay un valor de  $h^*$  óptimo y para valores más pequeños que éste, la varianza comienza a crecer deteriorando la aproximación. Algunos autores han publicado trabajos en esta dirección, ver [4].

## Método pathwise-derivative

El objetivo de este método es evitar las desventajas del método anterior generando un estimador que sea insesgado y cuya varianza no dependa de  $h$ . Bajo ciertas condiciones, la derivada de una esperanza es igual a la esperanza de la derivada, o sea

$$\frac{dV(\theta)}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} E^*[Y(\theta)] = E^* \left[ \frac{dY(\theta)}{d\theta} \right].$$

$Y(\theta)$  es una variable aleatoria para cada  $\theta$  en un intervalo de los reales.  $Y$  es una función que depende de  $\theta$  y de  $\omega \in \Omega$ . Entonces, ¿qué significado tiene la derivada de  $Y$  respecto a  $\theta$ ? Se puede interpretar como la tasa de cambio de  $Y$  al variar  $\theta$  cuando se mantiene  $\omega$  fijo y se define por

$$\frac{dY(\theta)}{d\theta} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Y(\theta + h) - Y(\theta)}{h}.$$

Si podemos afirmar que, con probabilidad uno, esta derivada existe, diremos que es la *pathwise derivative* de  $Y$ . En el caso de las opciones, esto se cumple para la mayoría de las



funciones de pago que sean continuas. En el libro de Glasserman [4] se dan condiciones rigurosas que debe cumplir  $Y$  para que exista esta derivada.

Al aplicar esta idea en el el cálculo de la cobertura de una opción europea vainilla se denotará por  $\mathbb{1}_{[S_T > K]}$  la función indicadora que se define por

$$\mathbb{1}_{[S_T > K]} = \begin{cases} 1, & \text{si } S_T > K \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y se tiene para  $\theta = S_0$ ,

$$\frac{dY(S_T)}{dS_0} = \frac{dY}{dS_T} \frac{dS_T}{dS_0},$$

por lo que

$$\frac{dY}{dS_T} = e^{-rT} \mathbb{1}_{[S_T > K]} \quad \text{y} \quad \frac{dY}{dS_T} = e^{-rT} \mathbb{1}_{[K > S_T]}$$

en el caso de un call y de un put, respectivamente. La otra derivada es igual a

$$\frac{dS_T}{dS_0} = \frac{S_T}{S_0}.$$

En suma, la delta para un call vainilla es igual a

$$\Delta = E^* \left( e^{-rT} \mathbb{1}_{[S_T > K]} \frac{S_T}{S_0} \right).$$

La esperanza puede calcularse por medio de Monte-Carlo. Observemos que el estimador que se obtiene es insesgado y la varianza del estimador es del orden  $\frac{C}{M}$ .

### Algoritmo Monte-Carlo con pathwise derivative

Dado  $S_0$ , para estimar el valor de  $\Delta$ , al tiempo  $t = 0$ , se llevan a cabo los siguientes pasos:

1. Se inicializan las variables:  $\Delta_0 = 0$ ,  $Var_0 = 0$
2. Para cada trayectoria  $i$ , con  $i = 1, \dots, M$  se calculan

a)

$$S_T^i = (K - S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma z_i \sqrt{T}})_+,$$

con  $z_i$  una normal con media cero y varianza uno.

b)

$$Y_i = E^* \left( \mathbb{1}_{[S_T^i > K]} \frac{S_T^i}{S_0} \right).$$

c)  $\Delta_i = \Delta_{i-1} + \frac{Y_i - \Delta_{i-1}}{i}$ . Para  $i > 1$ ,  $Var_i = (1 - \frac{1}{i-1})Var_{i-1} + i(\Delta_i - \Delta_{i-1})^2$ .

3.  $\Delta_M = e^{-rT} \Delta_M$

4. Un intervalo de confianza del 95 % para  $\Delta$  está dado por

$$\Delta \in \left[ \Delta_M - \frac{1.96\sqrt{Var_M}}{\sqrt{M}}, \Delta_M + \frac{1.96\sqrt{Var_M}}{\sqrt{M}} \right].$$

A continuación se presenta, para el mismo ejemplo que se utilizó para ilustrar diferencias finitas, el desempeño del método pathwise-derivative. Los datos son los siguientes: Un put europeo vainilla con  $K = 52$ ,  $S_0 = 50$ ,  $T = 6$  meses,  $r = 0.06$  y  $\sigma = 0.12$ . El valor exacto de  $\Delta$  es  $-0.526466$ .

$M$	Lím. inferior	Estimación	Lím. superior	Long. intervalo
1000	-0.5357	-0.5057	-0.4757	0.0599
10000	-0.5335	-0.5241	-0.5146	0.0189
100000	-0.5299	-0.5270	-0.5240	0.0060
1000000	-0.5276	-0.5266	-0.5257	0.0019

Figura 2.2: Estimación de Delta por Monte-Carlo-pathwise derivative

Los resultados muestran que el valor exacto siempre está en el intervalo de confianza y que el error disminuye a medida que  $M$  se incrementa, comportamiento que no se observa en la Figura 2.2 cuando se aplica diferencias finitas.

### 2.2.1. Cobertura de la opción asiática

En esta sección se aplica el método pathwise-derivative al cálculo de la cobertura de la opción asiática. Este caso ilustra el uso del método pathwise-derivative para aproximar la cobertura de opciones cuya valuación no puede llevarse a cabo a través de una solución exacta.

Como se vio en el segundo capítulo, para la opción asiática sólo existe una solución en series, vease [13], que no es muy práctica, por lo que la valuación debe aproximarse por algún método numérico como el método de Monte-Carlo.

Una opción asiática europea es aquella que sólo puede ejercerse en el tiempo de vencimiento  $T$  con función de pago igual a la diferencia entre  $K$  y un promedio de valores de  $S_t$ . Hay opciones asiáticas cuya función de pago depende del promedio aritmético del precio del subyacente en un número finito de puntos  $t_i \in [0, T]$  y hay otras en la que el promedio se calcula tomando en cuenta los precios a lo largo del intervalo  $[0, T]$ . Por ejemplo, en el caso de un call asiático la función de pago descontada  $Y$  puede tomar las siguientes formas:

$$Y(S) = e^{-rT} \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_{t_i} - K \right)_+ \quad \text{o} \quad Y(S) = e^{-rT} \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - K \right)_+.$$

En ambos casos  $Y$  es una función continua. Para el primer caso, el cálculo de la sensibilidad de  $V$  respecto a una variable  $\theta$  por el método pathwise-derivative se hace a

través de una nueva variable  $\bar{S} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_{t_i}$ . Entonces

$$\frac{dV}{d\theta} = E^* \left( \frac{dY}{d\theta} \right) = E^* \left( \frac{dY}{d\bar{S}} \frac{d\bar{S}}{d\theta} \right).$$

En particular, si  $\theta = S_0$ , cuando se desea calcular la cobertura de una opción call al tiempo  $t = 0$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dS_0} &= E^* \left( \frac{dY}{d\bar{S}} \frac{d\bar{S}}{dS_0} \right). \\ \frac{dY}{d\bar{S}} &= e^{-rT} \mathbb{1}_{[\bar{S} > K]}, \\ \frac{d\bar{S}}{dS_0} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{dS_{t_i}}{dS_0} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{S_{t_i}}{S_0}. \end{aligned}$$

Por lo que el valor de delta al tiempo  $t = 0$  es igual a

$$\Delta = E^* \left( e^{-rT} \mathbb{1}_{[\bar{S} > K]} \frac{\bar{S}}{S_0} \right).$$

El método de Monte-Carlo puede aplicarse para obtener una estimación del valor esperado, generando un estimador insesgado

$$\hat{\Delta} = e^{-rT} \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \left[ \mathbb{1}_{[\bar{S}^j > K]} \frac{\bar{S}^j}{S_0} \right], \quad (2.7)$$

con error cuadrático medio del orden  $C/M$ .

Si deseamos aplicar el método pathwise-derivative para el caso del promedio a lo largo del intervalo  $[0, T]$  las cosas ya no son tan fáciles, dado que el valor de la integral debe ser aproximado a través de un método numérico como los que se usaron en el capítulo anterior en la valuación de opciones asiáticas. Si se selecciona el esquema más sencillo, ver (1.10), entonces, dado  $N \in \mathcal{N}$ ,  $h = T/N$  y  $t_0 = 0$ ,  $t_i = ih$  y  $T_N = T$ , la integral se aproxima por

$$\frac{1}{T} \int_0^T S_u du \approx \frac{h}{T} \sum_{i=1}^N S_{t_i}.$$

Si se denota con  $\bar{S}^h = \frac{h}{T} \sum_{i=1}^N S_{t_i}$  entonces

$$\frac{dV}{d\theta} \approx \frac{d}{d\theta} E^* (e^{-rt} (\bar{S}^h - K)_+).$$

En particular cuando  $\theta = S_0$  la cobertura al tiempo  $t = 0$  se aproxima por

$$\Delta \approx E^* \left( e^{-rT} \mathbb{1}_{[\bar{S}^h > K]} \frac{\bar{S}^h}{S_0} \right).$$

El estimador que se obtienen al aproximar el valor esperado por Monte-Carlo es igual a

$$\hat{\Delta}^h = \frac{e^{-rT}}{M} \sum_{j=1}^M \left[ \mathbb{1}_{[S_j^h > K]} \frac{\overline{S_j^h}}{S_0} \right].$$

A continuación se presenta el desempeño de este método, Monte-Carlo con pathwise derivative (MC-PD), cuando se calcula la cobertura de la opción call asiática europea que se utilizó en la sección 2.3. Los datos son: precio inicial,  $S_0 = 100$ , precio de ejercicio  $K = 100$ , tasa libre de riesgo  $r = 0.10$ , volatilidad  $\sigma = 0.20$  y  $T = 1$  año.

M/h	0.1		0.01	
	Estimación	Int. de conf. 95 %	Estimación	Int. de conf. 95 %
100	0.638	[0.604,0.671]	0.7140	[0.614,0.815]
1000	0.662	[0.629,0.695]	0.6431	[0.609,0.677]
10000	0.641	[0.630,0.652]	0.6493	[0.639,0.660]
100000	0.643	[0.640,0.646]	0.6513	[0.648,0.655]

Figura 2.3: Estimación de Delta para una opción asiática por MC-PD

Observemos que no vale la pena incrementar el tamaño de  $M$  si  $h$  queda fijo. El error que se comete al aproximar la integral por el esquema numérico (1.10) es de orden  $h$ , mientras que el error que se comete al usar Monte-Carlo es de orden  $1/\sqrt{M}$ . Entonces hay que seleccionar  $h$  y  $M$  tal que  $h \approx \frac{1}{\sqrt{M}}$ .

En este caso el estimador ya no es insesgado ya que  $E^*(\Delta - E(\hat{\Delta}^h)) \neq 0$ . Pero este valor esperado tiende a cero cuando  $h$  tiende a cero por lo que el estimador es asintóticamente insesgado. El orden del error cuadrático medio de  $\hat{\Delta}^h$  es más difícil de calcular que en los otros casos por lo que remitimos al lector a la literatura especializada, ver [4].

Por último, cabe señalar que la aproximación será mejor si se usa un esquema de mayor orden para aproximar la integral. Por ejemplo, el segundo esquema visto en el capítulo anterior.

## 2.3. Cálculo de algunas griegas por Monte-Carlo

Se puede utilizar el método pathwise-derivative para estimar la sensibilidad del valor de la opción a cambios en los parámetros. A continuación se presenta el cálculo de algunas griegas para una opción call vainilla.

El cálculo de Vega, que mide la sensibilidad del precio de  $V$  a variaciones en la volatilidad, se reduce con el método pathwise-derivative al siguiente cálculo

$$\begin{aligned} Vega_t &= \frac{dV_t}{d\sigma} = E^* \left( \frac{dY}{dS_T} \frac{dS_T}{d\sigma} \right) = e^{-r(T-t)} E^* \left( \mathbb{1}_{[S_T > K]} \frac{dS_T}{d\sigma} \right). \\ \frac{dS_T}{d\sigma} &= (\sqrt{T-t}Z - \sigma(T-t))S_T, \end{aligned}$$

con  $Z$  una normal con media cero y varianza uno.

Al aplicar el método pathwise-derivative al cálculo de  $\rho$ , que mide la sensibilidad del precio a variaciones en la tasa de interés, y de  $\Theta$ , que lo hace respecto al tiempo transcurrido, se obtiene

$$\rho_t = \frac{dV_t}{dr} = E^* \left( \frac{dY_t}{dr} \right) = e^{-r(T-t)} (T-t) E^* \left( \mathbb{1}_{[S_T > K]} S_T - (S_T - K)_+ \right).$$

$$\Theta_t = \frac{dV_t}{dt} = E^* \left( \frac{dY_t}{dt} \right),$$

$$\frac{dY_t}{dt} = e^{-r(T-t)} \left( r(S_T - K)_+ + \mathbb{1}_{[S_T > K]} \frac{dS_T}{dt} \right).$$

$$\frac{dS_T}{dt} = - \left( \frac{\sigma Z}{2\sqrt{T-t}} + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right) S_T.$$

con  $Z$  una normal con media cero y varianza uno. Si en todos estos cálculos, el valor esperado es estimado por Monte-Carlo se obtendrá, en cada caso, un estimador insesgado con error cuadrático medio del orden  $\frac{1}{M}$ .

Desgraciadamente, este método no puede utilizarse para calcular la  $\Gamma$ , que es la variación de delta al cambio del precio en el subyacente, ya que eso implica el cálculo de la derivada de delta respecto a  $S_0$ , lo que es igual a

$$\Gamma = \frac{d^2V}{dS_0^2} = e^{-rT} \frac{d}{dS_0} E^* \left( \mathbb{1}_{[S_T > K]} \frac{dS_T}{dS_0} \right).$$

La presencia de la función indicadora impide intercambiar el valor esperado con la derivada. En este caso o se aproxima por diferencias finitas o se usan otros métodos más sofisticados como la razón de máxima verosimilitud, ver [4].

A continuación se presentan los resultados numéricos que se obtienen al estimar Vega,  $\rho$  y  $\Theta$  por Monte-Carlo combinado con pathwise derivative para la opción call europea vainilla con  $K = 52$ ,  $S_0 = 50$ ,  $T = 6$  meses,  $r = 0.06$  y  $\sigma = 0.12$ . Al tiempo  $t = 0$ , el valor de Vega exacto es 14.07383, de  $\rho = -14.130924$  y de  $\Theta = .006851$ .

	Vega	Intervalo	$\rho$	Intervalo	$\Theta$	Intervalo
$10^3$	14.6430	[13.3999,15.8867]	-14.710	[-15.505,-13.915]	.0080	[-.1071,.1231]
$10^5$	14.1046	[13.9846,14.2246]	-14.095	[-14.175, -14.015]	-.0012	[-.0119,.0095]
$10^7$	14.0672	[14.0553,14.0792]	-14.127	[-14.135,-14.119]	.0072	[.0061,.0083]

Figura 2.4: Estimación de Vega,  $\rho$  y  $\Theta$  para una opción vainilla por MC-PD

### 2.3.1. Cálculo de las griegas para la opción asiática

El método pathwise-derivative combinado con Monte-Carlo nos permite aproximar el valor de las griegas de la opción asiática. Para ello, supongamos que la función de pago

descontada al tiempo  $t$  de la opción asiática depende del promedio aritmético; es decir es de la forma

$$Y_t = e^{-r(T-t)}(\bar{S} - K)_+,$$

con  $\bar{S} = \frac{h}{T} \sum_{i=1}^N S_{t_i}$ . El valor de la opción está dado por  $V_t = E^*(Y_t)$  por lo que

$$Vega_t = \frac{dV_t}{d\sigma} = E^*\left(\frac{dY_t}{d\sigma}\right) = E^*\left(\frac{dY_t}{d\bar{S}} \frac{d\bar{S}}{d\sigma}\right).$$

$$Vega_t = e^{-r(T-t)} E^*\left(\mathbb{1}_{[\bar{S} > K]} \frac{d\bar{S}}{d\sigma}\right),$$

y

$$\frac{d\bar{S}}{d\sigma} = \frac{h}{T\sigma} \sum_{i=1}^N [z_i \sqrt{t_i} - \sigma t_i] S_{t_i},$$

con  $z_i$  una normal con media cero y varianza uno.

$$\rho_t = \frac{dV_t}{dr} = E^*\left(\frac{dY_t}{d\bar{S}} \frac{d\bar{S}}{dr}\right) = e^{-r(T-t)} E^*\left(\mathbb{1}_{[\bar{S} > K]} \frac{d\bar{S}}{dr} - (T-t)Y_t\right),$$

con

$$\frac{d\bar{S}}{dr} = \frac{h}{T} \sum_{i=1}^N t_i S_{t_i}.$$

$$\Theta_t = \frac{dV_t}{dt} = E^*\left(\frac{dY_t}{dt}\right),$$

$$\frac{dY_t}{dt} = r e^{-r(T-t)} \left[ \mathbb{1}_{[\bar{S} > K]} \frac{d\bar{S}}{dt} + (\bar{S} - K)_+ \right]$$

y

$$\frac{d\bar{S}}{dt} = \frac{h}{T} \sum_{i=1}^N S_{t_i} \left[ (r - \sigma^2/2) + \frac{1}{2\sqrt{t_i}} \sigma z_i \right],$$

con  $z_i$  una normal con media cero y varianza uno.

Por último, se presenta para la opción call asiática europea que se utilizó en la sección 2.3, el cálculo de las griegas Vega,  $\rho$  y  $\theta$ . Los datos son: precio inicial,  $S_0 = 100$ , precio de ejercicio  $K = 100$ , tasa libre de riesgo  $r = 0.10$ , volatilidad  $\sigma = 0.20$  y  $T = 1$  año. Para aproximar la integral se escogió  $h = .01$ .

M	Vega	longitud	$\rho$	longitud	$\Theta$	longitud
$10^3$	[17.32,23.08]	5.76	[26.82, 29.61]	2.80	[10.85, 12.61]	1.75
$10^5$	[19.06,19.62]	.56	[27.36, 27.64]	.28	[11.13, 11.31]	.17
$10^7$	[19.24,19.30]	.06	[27.52, 27.55]	.03	[11.22, 11.23]	.02

Figura 2.5: Estimación de Vega,  $\rho$  y  $\Theta$  para una opción asiática por MC-PD

# Apéndice A

## Anexos

### A.1. Generadores de números aleatorios

Una forma de generar números aleatorios es lanzar una moneda al aire, tirar un dado o sacar una carta de una baraja o dando de vueltas a un disco, que tiene inscritos a lo largo de la circunferencia números, y que se mueve por medio de una fuerza mecánica no determinista. Estos procedimientos son útiles siempre que se desee generar un número pequeño de números aleatorios, pero si se desea generar miles de ellos se requieren procedimientos que puedan hacer uso de las computadoras. Un ejemplo que ilustra las limitaciones de estos procedimientos lo dio la empresa *Rand* que en 1955 publicó una tabla de un millón de números aleatorios. En un principio fue un éxito, pero pronto mostró sus limitaciones para ciertos cálculos, en los que se requiere miles y miles de números aleatorios, como por ejemplo en aplicaciones del método de Monte-Carlo en dinámica molecular.

El primer algoritmo computacional para generar números aleatorios fue el algoritmo de cuadrados medios de Von Neumann que fue publicado a fines de los años cuarenta. El algoritmo consiste en lo siguiente: Dado un número entero positivo de  $N$  dígitos  $X_0$ , con  $N$  par, tomar  $s$  números, con  $s < N/2$ , a la izquierda del dígito  $d_{N/2}$  incluyendo a este dígito y  $s$  números a su derecha. Este nuevo número se eleva al cuadrado y el resultado se indica como  $X_1$ ; si denominamos como  $U_1 = .X_1$  entonces  $U_1$  es el primer número pseudo-aleatorio uniforme en el intervalo  $(0, 1)$ . Se repite el proceso que se le aplicó a  $X_0$  a  $X_1$  para generar  $X_2$  y obtener a su vez  $U_2 = .X_2$ , y así sucesivamente. De esta forma se generan  $n$  números en  $(0, 1)$  que ya no son propiamente aleatorios pues no son producto del azar.

Ilustremos con un ejemplo este algoritmo. Consideremos que  $N = 6$ ,  $s = 2$  y  $x_0 = 256874$ . Los dígitos que se seleccionan son 5687, que elevados al cuadrado nos dan el siguiente elemento de la sucesión  $x_1 = 32341969$  que da lugar a  $U_1 = .32341969$ . De esta forma se obtienen  $x_2 = (3419)^2$ ,  $U_2 = .11689561$ ,  $x_3 = (6895)^2$  y  $U_3 = .47541025$  y así sucesivamente.

A sucesiones de números obtenidos por algoritmos deterministas cuya complejidad nos impide predecir de antemano cuál es el valor de su  $k$ -ésimo elemento se les llama números pseudo-aleatorios.

Los algoritmos para generar números pseudo-aleatorios en el intervalo  $(0, 1)$  deben

tener buenas propiedades estadísticas, entre éstas:

1. Los números deben distribuirse uniformemente en el intervalo  $(0, 1)$ .
2. No deben estar correlacionados entre sí.
3. Deben permitirnos generar un gran número de ellos sin que se comiencen a repetir.

El algoritmo de Von-Neumann no tiene buenas propiedades estadísticas y a veces sólo se pueden generar sucesiones pequeñas como cuando los dígitos que se seleccionan para generar un nuevo número son todos cero.

La mayoría de los algoritmos que se utilizan hoy en día para generar números pseudo-aleatorios con distribución uniforme se basan en congruencias lineales. El primero en introducirlos fue Lehmer en 1951 y la idea es la siguiente.

Dado  $a$ ,  $c$  y  $m$  enteros positivos generar la sucesión  $X_i$  por medio del siguiente procedimiento:

1. Dada  $Z_0$  aleatoria.
2.  $Z_{i+1} = (aZ_i + c) \text{ mod}(m)$ .
3.  $X_{i+1} = Z_{i+1}/m$ .

O sea  $Z_{i+1}$  es el residuo que se obtiene al dividir a  $aZ_i + c$  entre  $m$ . Claramente  $Z_{i+1} < m$  por lo tanto  $X_{i+1} \in (0, 1)$ . A  $Z_0$  se le llama la semilla.

### Ejemplo

Sea  $c = 7$ ,  $a = 1$ ,  $m = 11$  y  $Z_0 = 3$ . Entonces

$i$	$Z_i$	$X_i$
1	10	0.909090909
2	6	0.545454545
3	2	0.181818182
4	9	0.818181818
5	5	0.454545455
6	1	0.090909091
7	8	0.727272727
8	4	0.363636364
9	0	0
10	7	0.636363636
11	3	0.272727273
12	10	0.909090909

Como se observa esta congruencia genera al menos 11 números antes de comenzar a repetirlos. De hecho genera todos los posibles residuos. A esto se le llama el ciclo de la



congruencia. Si se seleccionan bien los números  $a$ ,  $c$  y  $m$  el algoritmo tiene ciclo máximo o sea igual a  $m$ .

Para computadoras de 32 bits (4 bytes), se ha observado que una buena selección de  $m$  es  $m = 2^{31} - 1$ ,  $a = 7^5 = 16,807$  y  $c = 0$ .

No basta con buscar generadores que tengan ciclo máximo también deseamos que se distribuyan uniformemente, que no estén correlacionados, que sean fáciles de generar y almacenar y que puedan replicarse. Es decir que si se conoce la semilla se replique la sucesión.

Otro ejemplo de un buen generador de números pseudo-aleatorios uniformes es el de Kobayashi que está dado por

$$Z_i = (314159269Z_{i-1} + 453806245) \bmod(2^{31}).$$

La búsqueda de mejores generadores de números aleatorios sigue abierta a la investigación. Para aprender más sobre este tema ver [4] y [12].

## A.2. Pruebas para validar generadores de números aleatorios

Se recomienda que antes de usar el generador de números aleatorios de cualquier paquete de software, se valide éste aplicando una serie de pruebas estadísticas y empíricas. Entre las estadísticas están:

1. Hacer un histograma con los números aleatorios y comprobar gráficamente que se distribuyen uniformemente en el intervalo  $(0, 1)$ .
2. Prueba de bondad de ajuste para probar la hipótesis que los números pseudo-aleatorios se distribuyen uniformes. La prueba consiste en lo siguiente:
  - a) Se divide el intervalo  $[0, 1]$  en  $k$  subintervalos de longitud  $\frac{1}{k}$ , (al menos  $k = 100$ .)
  - b) Se generan  $n$  variables pseudo-aleatorias  $U_i, i = 1, \dots, n$ . Se cuentan cuántas  $U_i$  caen en el subintervalo  $j$ , sea  $f_j = \text{Núm. } U_i \text{ en el intervalo } [\frac{j-1}{k}, \frac{j}{k})$  para  $j = 1, \dots, k$ .
  - c) Sea  $\chi^2 = \frac{k}{n} \sum_{j=1}^k (f_j - \frac{n}{k})^2$
  - d) Para  $n$  suficientemente grande  $\chi^2$  tiene una distribución  $\chi^2$  con  $k - 1$  grados de libertad.
  - e) Si  $\chi^2 > \chi_{k-1, 1-\alpha}^2$  se rechaza la hipótesis de que las  $U_i$  sean uniformes en  $(0, 1)$  con un nivel de confianza  $\alpha$ .

Observación: Estas pruebas no son adecuadas para valores de  $n$  pequeños o muy grandes ya que se rechazará la hipótesis por la más leve diferencia.

3. Verificar si  $(U_i, U_{i+1})$  son variables aleatorias independientes que se distribuyen uniformemente en el cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$ . La prueba consiste en lo siguiente:

- a) Se generan  $n$  variables pseudo-aleatorias uniformes en  $[0, 1]$ .
- b) Dividir el cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$  en  $n^2$  rectángulos de longitud  $J_1$  y ancho  $J_2$ .
- c) Sea  $f_{j_1, j_2} = \text{Núm. de } (U_i, U_j) \text{ tal que } U_i \in J_1 \text{ y } U_j \in J_2$ .
- d)

$$\chi^2 = \frac{k^2}{n} \sum_{j_1=1}^k \sum_{j_2=1}^k (f_{j_1 j_2} - \frac{n}{k^2})^2$$

- e) Si  $\chi^2 > \chi_{k^2-1, 1-\alpha}^2$  se rechaza la hipótesis nula.

Entre las empíricas está una para probar independencia, conocida como prueba de corridas.

1. Dados números pseudo-aleatorios uniformes  $U_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  se van contando el número de  $U_i$  que satisfacen que  $U_i < U_{i+1}$ . A cada una de las sucesiones que satisfacen lo anterior se le llama corrida. Al término de la construcción de las corridas se clasifican por su número de elementos. Sea  $r_i = \text{Núm. de corridas de longitud } i$  con  $i = 1, \dots, 5, 6$  definidas por

$$r_i = \begin{cases} \text{número de corridas de longitud } i, & i = 1, \dots, 5 \\ \text{número de corridas de longitud } \geq 6 & i = 6. \end{cases}$$

2. Se construye un estadístico

$$R = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 a_{ij} (r_i - nb_i)(r_j - nb_j),$$

con el elemento  $a_{ij}$  de la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4529.4 & 9044.9 & 13568 & 18091 & 22615 & 27892 \\ 9044.9 & 18097 & 27139 & 36187 & 45234 & 55789 \\ 13568 & 27139 & 40721 & 54281 & 67852 & 83685 \\ 18091 & 36187 & 54281 & 72414 & 90470 & 111580 \\ 22615 & 45234 & 67852 & 90470 & 113262 & 139476 \\ 27892 & 55789 & 83685 & 111580 & 139476 & 172860 \end{bmatrix}$$

y las  $b_i$  son los elementos del vector  $b = (\frac{1}{6}, \frac{5}{24}, \frac{11}{120}, \frac{19}{720}, \frac{29}{5040}, \frac{1}{840})$ . Estas constantes aparecen calculadas en el libro de Knuth, ver [9].

3. Para  $n$  grande, se recomienda  $n \geq 4000$ ,  $R$  se aproxima a una  $\chi^2$  con 6 grados de libertad.
4. Si  $R > \chi_6^2$  se rechaza la hipótesis.

Más pruebas de este tipo se pueden encontrar en en los libros de [12] y [9].

### A.3. Generación de números aleatorios con otras distribuciones

Se pueden generar número pseudo-aleatorios para casi cualquier distribución discreta o continua a partir de números pseudo-aleatorios uniformes. En estas notas se presentan para el caso de la distribución Bernoulli, exponencial y normal, que son las distribuciones más usadas en finanzas.

1. Para generar números aleatorios Bernoulli  $X_i$  que toman el valor  $x_1$  con probabilidad  $p$  y  $x_2$  con probabilidad  $1 - p$ , se aplica el siguiente algoritmo:

a) Se genera una v.a. uniforme,  $U_i$ , en  $[0, 1]$ .

b) Si  $U_i \leq p \Rightarrow X_i = x_1$ .

c) Si  $U_i > p \Rightarrow X_i = x_2$ .

2. Si la variable aleatoria  $X_i$  toma los valores  $x_1, x_2, \dots, x_n$  con probabilidad  $p_1, \dots, p_n$  se hace lo siguiente:

a) Se genera una v.a. uniforme en  $[0, 1]$ .

b)

$$X_i = \begin{cases} x_1, & 0 \leq U_i \leq p_1 \\ x_2 & p_1 < U_i \leq p_1 + p_2, \\ x_3 & p_1 + p_2 < U_i \leq \sum_{j=1}^3 p_j, \\ \dots & \\ x_n & \sum_{j=1}^{n-1} p_j < U_i. \end{cases}$$

3. En el caso de las variables continuas se utiliza un método general que es el método inverso que se puede aplicar siempre que  $F$  sea una distribución estrictamente creciente. Sea  $U$  una variable aleatoria uniforme en  $(0, 1)$ , para cualquier distribución  $F$  la variable aleatoria definida por  $\chi = F^{-1}(U)$  tiene distribución  $F$ .

Por ejemplo sea  $X$  la variable aleatoria con distribución exponencial con parámetro  $\mu$ . Su distribución está dada por

$$F(x) = 1 - e^{-\mu x} \quad \text{si } x \geq 0.$$

Si  $F(x) = y$  entonces  $y \in (0, 1)$  y  $1 - e^{-\mu x} = y$ . Despejando  $x$  se obtiene que la variable aleatoria exponencial se puede construir a partir de  $X = \frac{-1}{\mu} \ln(1 - U)$  con  $U$  una variable aleatoria uniforme en  $(0, 1)$ .

Nótese que si  $U \in (0, 1)$  también lo está  $1 - U$  por lo que el algoritmo para generar variables pseudo-aleatorias con distribución exponencial con parámetro  $\mu$  queda de la siguiente forma:

a) Se genera una v.a.  $U$  uniforme en  $(0, 1)$ .

b)  $\chi = \frac{-1}{\mu} \ln(U)$  es exponencial de parámetro  $\mu$ .

También se utiliza este método para las variables normales.

4. Otro método para generar normales es el siguiente: Sean  $(x, y) \sim N(0, 1)$  variables aleatorias independientes, entonces la función de densidad conjunta se define

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2}.$$

Si estas dos variables se llevan al plano  $(r, \theta)$  a través del cambio de coordenadas polares  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\theta = \text{Tang}^{-1}(\frac{y}{x})$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$  y al origen lo manda al origen. La pregunta es si  $(x, y)$  son normales independientes, entonces ¿cuál es la densidad de  $(r, \theta)$ ?  $g(r^2, \theta) = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} e^{-r^2/2}$  con  $r^2$  exponencial con parámetro  $\lambda = 1/2$  y  $\theta$  uniforme en el intervalo  $(0, 2\pi)$ .

### Algoritmo de Box-Muller

1. Se genera dos v.a. uniformes independientes  $U_1, U_2 \sim (0, 1)$ .
2. Sea  $R^2 = -2 \ln(U_1)$ ,  $\theta = 2\pi U_2$ .
- 3.

$$x = R \cos \theta = \sqrt{-2 \ln(U_1)} \cos(2\pi U_2)$$

$$y = R \sin \theta = \sqrt{-2 \ln(U_1)} \sin(2\pi U_2)$$

son normales independientes.

### Simulación de una caminata aleatoria y de un browniano

Considérese el siguiente juego: Se tiene jugadores que se colocan en el origen de un plano cartesiano. Se tira una moneda, si sale sol avanzan hacia la posición  $(1, 1)$ , si cae águila avanzan hacia  $(1, -1)$ . A la siguiente tirada si sale sol avanzan hacia la posición (número jugada, posición anterior +1) si sale águila se mueve a la posición (número jugada, posición anterior -1) y así sucesivamente. Después de  $n$  tiradas, gana quien tenga la coordenada  $y$  más grande.

Simúlese este juego por computadora. Denótese por  $S_j^i$  = la coordenada  $y$  de la posición del jugador  $i$  en la tirada  $j$ . Claramente el resultado de cada moneda es independiente y se puede representar como una variable aleatoria con distribución Bernoulli. Esta variable toma el valor sol con probabilidad de un medio y el de águila con las misma probabilidad para que el juego sea justo.

La sucesión  $S_j^i$  para el jugador  $i$  forma una sucesión de variables aleatorias que se conoce con el nombre de caminata aleatoria y describe el comportamiento de muchos problemas de aplicación.

### Algoritmo para generar una caminata aleatoria

1. Inicialice  $S_0^i = 0$ .
2. Para cada tirada  $j$  desde  $j = 1, \dots, M$  se genera una variable aleatoria Bernoulli a través de una uniforme. Sea  $U_j$  una variable uniforme en el intervalo  $(0, 1)$  lo que denotaremos por  $U_j \sim U(0, 1)$ . Si

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{si } U_j > 1/2 \\ -1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

3.  $S_{j+1}^i = S_j^i + X_j$ .

Si se unen todas las posiciones del jugador por medio de líneas rectas se tiene una posible trayectoria que puede seguir el jugador  $i$ . El número de distintas trayectorias que puede seguir es  $2^M$ .

Obsérvese que  $E(X_j) = 0$  y que  $Var(X_j) = 1$ . La probabilidad de que el jugador  $i$  esté en la  $n$ -tirada en la ordenada  $y = n$  es  $1/(2)^n$ .

$$E(S_M^i) = E\left(\sum_{i=1}^M X_i\right) = \sum_{i=1}^M E(X_i) = 0.$$

$$Var(S_M^i) = Var\left(\sum_{i=1}^M X_i\right) = \sum_{i=1}^M Var(X_i) = M.$$

Si  $M$  es lo suficientemente grande se aplica el teorema del límite central que afirma que

$$Z_M = \frac{S_M - E(S_M)}{\sqrt{Var(S_M)}} = \frac{S_M}{\sqrt{Var(S_M)}} \sim N(0, 1).$$

Por lo tanto, para  $M$  grande  $S_M$  se comporta como una normal.

### Simulación de un movimiento Browniano

Como se vió en las opciones, el movimiento browniano es un proceso estocástico continuo que satisface:

1.  $W(0) = 0$
2.  $E(W(t)) = 0$  y los incrementos  $W(t) - W(s)$  con  $t \geq s$  son variables aleatorias normales independientes con media cero y varianza  $t - s$ .

Hay dos formas de simular un browniano. En ambos casos se tiene que discretizar el tiempo.

Dado un intervalo  $[0, T]$ , sea  $N \in \mathcal{N}$  y sea  $h = T/N$ . Definamos los puntos  $t_0 = 0$ ,  $t_i = ih$  y  $t_N = T$ . Asociada a esta partición del intervalo  $[0, T]$  en subintervalos  $[t_i, t_{i+1}]$  se puede simular el browniano por medio de una caminata aleatoria o por medio de gaussianas.

### Algoritmo para generar un browniano por medio de una caminata aleatoria

1. Dados  $t_0 = 0$ ,  $t_i = ih$  y  $t_N = T$  y  $W_0 = 0$ ,
2. Para  $i = 1, \dots, N$ , se genera una variable aleatoria tipo Bernoulli  $X_i$  y se calcula  $W_i = W_{i-1} + X_i\sqrt{h}$ .
3. Para construir una función lineal por pedazos  $\hat{W}$  que interpole a ésta se define

$$\hat{W}(t) = W_j + \frac{W_{j+1} - W_j}{h}(t - t_j) \quad \text{para } t \in (t_j, t_{j+1}).$$

### Algoritmo para generar un browniano por medio de gaussianas

En este caso se utiliza el hecho que incrementos de brownianos son variables independientes que se distribuyen en forma normal con media cero y varianza  $t - s$ .

1. Dado  $h = T/N$  se define  $t_0 = 0$ ,  $t_i = ih$  y  $t_N = T$ , Sea  $S_0 = 0$ ,
2. Para  $i = 1, \dots, N$  se genera una variable aleatoria  $Y_i \sim N(0, 1)$  y se calcula  $W_i = W_{i-1} + Y_i\sqrt{\Delta t}$ .
3. Una aproximación continua  $\hat{W}$  de  $W$  está dada por

$$\hat{W}(t) = W_j + \frac{W_{j+1} - W_j}{h}(t - t_j) \quad \text{para } t \in (t_j, t_{j+1}).$$

### Aproximación de la solución de un proceso estocástico

Una ecuación diferencial estocástica es una ecuación de la forma

$$dX_t = a(t, X_t) dt + b(t, X_t) dW_t, \quad X(t_0) = X_0.$$

donde  $a, b$  son funciones continuas respecto a  $t$  y a  $X_t$ . Otra forma de expresar esta ecuación es en forma integral

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^t a(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t b(s, X_s) dW_s.$$

La primera integral es una integral de Riemann, pero la segunda es una integral estocástica, ver [15]

### Ejemplo

Movimiento browniano geométrico

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t, \quad X(0) = X^*.$$

Esta ecuación tiene solución exacta

$$X(t) = X^* e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t}.$$

La aproximación numérica implica, como en el caso del browniano, discretizar la ecuación. Para ello, se discretiza primero el tiempo: dado un intervalo  $[0, T]$ , sea  $N \in \mathcal{N}$  y sea  $h = T/N$ . Defínanse los puntos  $t_0 = 0$ ,  $t_i = ih$  y  $t_N = T$ . Asociada a esta discretización, denótese por  $X_i \doteq X(t_i)$ . El segundo paso es discretizar la ecuación diferencial estocástica por medio de algún esquema numérico. El esquema más sencillo es el de Euler que al aplicarlo al browniano geométrico toma la forma

$$dX_i \approx X_{i+1} - X_i = \mu X_i h + \sigma X_i (W_{i+1} - W_i) \quad (\text{A.1})$$

y se usa el hecho que  $W_{i+1} - W_i = Y_i \sqrt{h}$ , con  $Y_i \sim N(0, 1)$ .

### Algoritmo de Euler para aproximar numéricamente la solución de la EDE

En este caso se utiliza el algoritmo para simular brownianos por medio de gaussianas del inciso anterior.

1. Dados  $t_0 = 0$ ,  $t_i = ih$  y  $t_N = T$  y  $X_0^h = X^*$ ,
2. Para  $i = 1, \dots, N$  se genera una variable aleatoria  $Y_i \sim N(0, 1)$  y se calcula  $X_i^h = X_{i-1}^h + \mu X_{i-1}^h h + \sigma X_{i-1}^h Y_i \sqrt{h}$ .
3. Para definir una función continua a partir de ésta se unen los valores  $X_i^h$  por medio de rectas, es decir se define

$$X^h(t) = X_i^h + \frac{X_{i+1}^h - X_i^h}{h} (t - t_i) \quad \text{para } t \in (t_i, t_{i+1}).$$

Al discretizar una ecuación diferencial estocástica se introduce un error. Este error es distinto dependiendo de la medida que se escoja. Para fines del cálculo del valor esperado de una función  $g$  continua en  $S_T$  el error es de orden  $h$ . Es decir existe una constante  $C > 0$  tal que

$$|E(g(X(T))) - E(g(X_T^h))| \leq Ch.$$

En el caso que nos interese aproximar a la trayectoria en los puntos  $t_i$  entonces

$$E\left(\max_{1 \leq i \leq N} |X(t_i) - X_{t_i}^h|\right) \leq C\sqrt{h}.$$

Hay otros métodos mas precisos, o sea de orden más alto, para aproximar la solución de una EDE, se sugiere para ello consultar [8].





# Apéndice B

## Integración numérica por Monte-Carlo

Sea  $X$  una variable aleatoria continua que toma valores en los reales con función de densidad igual a  $f(x)$  en el intervalo  $[\alpha, \beta]$  y cero en su complemento en los reales. La probabilidad de que la variable aleatoria tome el valor menor o igual a  $a \in [\alpha, \beta]$  está dado por

$$P[X \leq a] = \int_{\alpha}^a f(x) dx.$$

La probabilidad es el área bajo la curva  $y = f(x)$  del punto  $\alpha$  al punto  $a$ .

La esperanza y de la varianza de esta variable aleatoria  $X$  están dados por

$$E(X) = \int_{\alpha}^{\beta} x f(x) dx, \quad \text{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \int_{\alpha}^{\beta} x^2 f(x) dx - E[X]^2.$$

De igual forma se puede definir la esperanza de un función continua  $g$  de la variable aleatoria  $X$  como

$$E[g(X)] = \int_{\alpha}^{\beta} g(x) f(x) dx.$$

Con frecuencia no es posible aplicar un método de integración para calcular en forma exacta la integral. En ese caso hay que aproximar la integral por medio de un método de integración numérica como el método del trapecio, de Simpson o Monte-Carlo.

### B.1. Integración numérica

Los métodos de integración de Newton-Cotes se obtienen al integrar polinomios de grado  $n$  que interpolan la función a integrar en el intervalo de integración. Por ejemplo, supongamos que nos interesa calcular  $F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^x e^{-s^2/2} ds$ . Esta integral no puede calcularse por medio de un método de integración por lo que una forma de aproximarla es por medio de la integral del polinomio lineal que interpola a  $e^{-s^2/2}$  en el intervalo  $[0, x]$ .

Sea  $f(x) : [a, b] \rightarrow R$  una función acotada en  $[a, b]$  entonces la integral de  $f$  se puede aproximar integrando un polinomio constante, lineal o cuadrático que interpole a  $f$  en  $[a, b]$ .

1. La fórmula del rectángulo se obtiene al interpolar a  $f(x)$  por medio del polinomio constante  $p_0(x) = f(\frac{a+b}{2})$ .

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) = R(f).$$

2. La fórmula del trapecio se obtiene al interpolar a  $f$  por medio de un polinomio lineal  $p_1(x) = \alpha x + \beta$  que satisfaga  $f(a) = p_1(a)$ , y  $f(b) = p_1(b)$ . Determinar el polinomio lineal es equivalente a resolver un sistema de ecuaciones lineales para  $\alpha$  y  $\beta$  cuya solución es

$$\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \quad \beta = \frac{f(b)a - f(a)b}{b-a}.$$

Al integrar  $p_1(x)$  en el intervalo  $[a, b]$  se obtiene la regla del trapecio con  $h = b - a$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p_1(x) dx = \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) = T(f).$$

El error está dado por

$$\int_a^b f(x) dx - T(f) = -\frac{h^3}{12}(f''(\eta)), \quad a < \eta < b.$$

3. Por último al integrar el polinomio cuadrático que interpola a  $f$  en  $x = a$ ,  $x = \frac{a+b}{2}$ , y  $x = b$  se obtiene la regla de Simpson con  $h = \frac{b-a}{2}$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p_2(x) dx = \frac{h}{3}(f(a) + 4f(a+h) + f(b)) = S(f).$$

El error que se comete al usar Simpson es

$$\int_a^b f(x) dx - S(f) = \frac{h^5}{90}(f^{(4)}(\eta)), \quad a < \eta < b.$$

### Ejemplos

1. Sea  $f(x) = x^3$ ,  $\int_0^1 x^3 dx = 0.25$ ;  $R(f) = 0.125$ ,  $T(f) = 0.5$ , y  $S(f) = 0.25$ . En este caso Simpson es exacta ya que integra en forma exacta a polinomios de grado menor o igual a 3.
2. Sea  $f(x) = e^{-x^2/2}$  estimar  $\int_0^1 e^{-x^2/2} dx$ .  $R(f) = 0.882497$ ,  $T(f) = 0.803265$  y  $S(f) = 0.856086$ .

### Aplicación de Monte-Carlo al cálculo de integrales

En el caso que nos ocupa, se desea estimar la integral de una función  $G$  continua, esta integral puede verse como el cálculo del valor esperado de la función  $G$  cuando se

aplica a una variable aleatoria con distribución uniforme. Supongamos que el intervalo de integración es  $[0, 1]$  y sea  $X_1, X_2$  hasta  $X_M$  una muestra de variables aleatorias, independientes con distribución uniforme en el intervalo  $[0, 1]$  entonces

$$\int_0^1 G(x) dx = E(G(X))$$

con  $X$  una variable aleatoria uniforme en  $[0, 1]$ .

De esta forma, con base en la Ley de los Grandes Números, esta integral se puede aproximar por

$$\int_0^1 G(x) dx \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M G(x_i).$$

Todo el problema se reduce a generar la muestra. Por otro lado, obsérvese que cualquier integral sobre el intervalo  $[a, b]$  se puede transformar a una integral sobre el intervalo  $[0, 1]$  con el siguiente cambio de variable  $x = a + (b - a)u$ , entonces

$$\int_a^b G(x) dx = (b - a) \int_0^1 G(a + (b - a)u) du \approx \frac{b - a}{M} \sum_{i=1}^M G(a + (b - a)u_i),$$

con  $u_i$  variables aleatorias uniformes en el intervalo  $[0, 1]$ .

El algoritmo de Monte-Carlo para estimar un intervalo de confianza del 95% de la esperanza de una función  $F(X)$ , con  $X$  una variable aleatoria uniforme estándar es el siguiente:

1. Denotemos por  $Var_i$  e  $\tilde{I}_i$  a la varianza acumulada y la media aritmética acumulada hasta la iteración  $i$ , respectivamente.
2. Sea  $Var_1 = 0; \tilde{I}_0 = 0$ ; Sea  $U_1$  una uniforme en  $(0, 1)$  y  $\tilde{I}_1 = F(U_1)$ .
3. Para  $i = 2, \dots, M$  hacer los siguientes pasos:
  - a) Generar un número aleatorio  $U_i$  uniforme.
  - b)  $\tilde{I}_i = \tilde{I}_{i-1} + \frac{F(U_i) - \tilde{I}_{i-1}}{i}; Var_i = (1 - \frac{1}{i})Var_{i-1} + i(\tilde{I}_i - \tilde{I}_{i-1})^2$ .
4.  $I \left[ \tilde{I}_M - \frac{1.96\sqrt{Var_M}}{\sqrt{M}}, \tilde{I}_M + \frac{1.96\sqrt{Var_M}}{\sqrt{M}} \right]$ .

### Ejemplo

Usemos lo anterior para aproximar el valor de

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2.5}^{2.5} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Transformemos primero la integral al intervalo  $[0, 1]$

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2.5} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{5}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-\frac{(2.5u)^2}{2}} du \approx \frac{5}{M\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^M e^{-\frac{(2.5u_i)^2}{2}}, \\ &\approx 1.0066 \quad \text{para } M = 100. \end{aligned}$$

El resultado no es bueno si comparamos con el valor que se obtiene al usar las tablas de la normal acumulada que es igual a 0.987580. Con el método del trapecio, que requiere únicamente de dos evaluaciones de la función, se obtiene el valor de 1.041 y con Simpson 0.955889. ¿Cómo se relaciona el error que cometemos con el tamaño de  $M$  de la muestra?

A continuación se presentan algunos resultados numéricos para distintos valores de  $M$ .

$M$	Lím. Inf.	Aprox.	Lím. Sup.	Long. Int.
10	0.939866	1.158364	1.376862	0.436997
100	0.939874	1.006611	1.073348	0.133474
1000	0.955516	0.976122	0.996730	0.041214
10000	0.981765	0.988231	0.994697	0.012932
100000	0.986738	0.988788	0.990838	0.004100

Figura B.1: Aproximaciones mediante el método Monte-Carlo a la integral.

Por lo que con 100000 evaluaciones de la función se obtiene una aproximación con dos cifras significativas. Es un hecho que Monte-Carlo converge lentamente por lo que no puede competir con Simpson o Trapecio para el cálculo de integrales en una variable, pero para el cálculo de integrales múltiples este método o variaciones de éste vuelve competitivo e inclusive mejor que cualquier otro método de integración numérica.

## B.2. Integración múltiple

En la sección anterior se analizó como evaluar integrales con dominio en un intervalo real. Ahora bien, si el dominio es una región de  $R^2$ , en la que las fronteras izquierda y derecha sean segmentos de rectas verticales, ( $x = a$  y  $x = b$ ) y la frontera inferior y superior estén dadas por las curvas  $y = l(x)$  y  $y = s(x)$ , respectivamente y  $l(x) < s(x)$ ,  $x \in (a, b)$ . La integral doble en ese dominio es:

$$\int_a^b \int_{l(x)}^{s(x)} f(x, y) dy dx \quad (\text{B.1})$$

Si bien, los problemas de integrales dobles no siempre aparecen en la forma (B.1), se supondrá que el problema se pudo reescribir en la forma anterior, en donde quizá sea necesario intercambiar  $x$  y  $y$ .

El problema de calcular la integral se resolverá convirtiéndolo al cálculo de integrales unidimensionales. Para esto, se define

$$J(x) \equiv \int_{l(x)}^{s(x)} f(x, y) dy, \quad (\text{B.2})$$

así que (B.1) se puede escribir como

$$I(x) = \int_a^b J(x) dx. \quad (\text{B.3})$$

Se puede obtener una aproximación numérica para (B.3) aplicando cualquiera de las fórmulas de integración numérica analizadas en la sección anterior, lo cual se puede expresar como

$$I(x) \approx \sum_{i=0}^n w_i J(x_i). \quad (\text{B.4})$$

Aquí, las  $w_i$  son los pesos y las  $x_i$  los puntos de la fórmula de integración que se utilice. Ahora bien, para  $x = x_i$  la ecuación (B.2) queda

$$J(x_i) \equiv \int_{l(x_i)}^{s(x_i)} f(x_i, y) dy. \quad (\text{B.5})$$

El anterior es un problema unidimensional y se puede evaluar mediante alguna de las fórmulas de integración numérica.

**Ejemplo** Evalúe la siguiente integral,

$$I = \int_1^2 \int_{x-1}^{x^2} \sqrt{x+y} dy dx,$$

utilice la regla de Simpson.

En este caso,  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $l(x) = x - 1$  y  $s(x) = x^2$ .

Aplicando el procedimiento descrito, y mediante la regla de Simpson, la integral anterior se puede aproximar por

$$I \approx \frac{h_x}{3} (H(x_0) + 4H(x_1) + H(x_2)),$$

en donde,

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1.5, \quad x_2 = 2,$$

además,  $h_x = \frac{b-a}{2} = 0.5$  y cada  $H(x_i)$  está dada por

$$H(x_i) = \int_{x_i-1}^{x_i^2} \sqrt{x_i + y} dy.$$

Por lo que, la aproximación de  $I$  está dada por:

$$I \approx \frac{h_x}{3} \left[ \int_{1-1}^{1^2} \sqrt{1+y} dy + 4 \int_{1.5-1}^{1.5^2} \sqrt{1.5+y} dy + \int_{2-1}^{2^2} \sqrt{2+y} dy \right],$$

Empleando la regla de Simpson para la primera integral se tiene,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1+y} \, dy &\approx \frac{0.5}{3} \left[ \sqrt{1+0} + 4\sqrt{1+0.5} + \sqrt{1+1} \right] \\ &\approx 1.218865508\end{aligned}$$

De forma análoga, para las otras integrales se obtiene,

$$\begin{aligned}\int_{0.5}^{2.25} \sqrt{1.5+yd} \, dy &\approx 2.955468605, \\ \int_1^4 \sqrt{2+y} \, dy &\approx 6.333410962.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la aproximación final de la integral es

$$\begin{aligned}I &\approx \frac{0.5}{3} [1.218865508 + 4(2.955468605) + 6.333410962]. \\ &= 3.229025149\end{aligned}$$

De una forma similar se pueden calcular integrales múltiples. Pero, entre mayor sea la dimensión, mayor será el número de puntos en donde se debe evaluar la función. Así por ejemplo, considérese una región de integración rectangular, si en cada eje se subdivide el intervalo correspondiente en  $n$  subintervalos, entonces, para el caso de la fórmula extendida de Simpson se tendrán  $(n+1)^2$  puntos de  $R^2$  en donde se debe evaluar la función  $f(x, y)$ . De aquí, es claro que si integramos una función  $g : R^m \rightarrow R$ , cuyo dominio es un *rectángulo* de  $R^m$  y en cada dirección se toman  $n$  subintervalos, el número de puntos en donde se debe evaluar la función  $g$  es de orden  $n^m$ . Este valor crece rápidamente por lo que una alternativa útil para aproximar integrales de dimensiones altas es el método de Monte Carlo.

Al igual que en el caso de una dimensión, supóngase que se está interesado en calcular

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 g(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_1 dx_2 \cdots dx_m$$

Como se comentó en la sección (1.1),  $I$  se puede expresar mediante la esperanza siguiente:

$$I = E[g(U_1, U_2, \dots, U_m)],$$

en donde  $U_1, U_2, \dots, U_m$  son variables aleatorias independientes, que se distribuyen de manera uniforme en  $(0, 1)$ .

Ahora, si se toman  $n$  conjuntos independientes, cada uno de ellos con  $m$  variables aleatorias independientes con distribución uniforme en  $(0, 1)$ , se tiene

$$(U_1^i, U_2^i, \dots, U_m^i), i = 1, \dots, n$$

entonces, ya que las variables aleatorias

$$g(U_1^i, U_2^i, \dots, U_m^i), i = 1, \dots, n,$$

son independientes e idénticamente distribuidas con media  $I$ , podemos utilizar nuevamente la ley fuerte de los grandes números para estimar  $I$  mediante la media aritmética  $\hat{I}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(U_1^i, U_2^i, \dots, U_m^i)$ .

Con base en lo anterior, se debe observar que el algoritmo para aproximar la integral y determinar los intervalos de confianza, es el mismo al que se dio en el caso unidimensional. Nótese que, si  $\sigma$  es la desviación estándar de  $g(U_1, U_2, \dots, U_m)$  entonces se tiene que  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  es la desviación estándar de  $\hat{I}_n$ , por lo que

$$P\left(\left|I - \hat{I}_n\right| < \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}\right) = P(|Z_n| < c) = 2\Phi(c),$$

con  $Z_n = \frac{I - \hat{I}_n}{\sigma/\sqrt{n}}$ ,  $\Phi(c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^c e^{-x^2/2} dx$  y  $c$  se selecciona dependiendo de la probabilidad que se desee obtener. Por ejemplo, si se quiere que la probabilidad sea 0.95 se selecciona a  $c$  como 1.96.

**Ejemplo** Aproxime el valor de la integral

$$\int_0^1 \int_0^1 e^{(x+y)^2} dy dx$$

Empleando el algoritmo que se dio para una dimensión se generó la tabla siguiente, los intervalos son al 95 % de confianza. El valor verdadero con 5 decimales de precisión es 4.89916.

$M$	Lím. Inf.	Aprox.	Lím. Sup.	Long. Int.
100	3.72101	4.73637	5.75174	2.03072
1000	4.03326	4.33065	4.62804	0.59478
10000	4.68907	4.80356	4.91804	0.22897
100000	4.86826	4.90544	4.94262	0.07436
1000000	4.88963	4.90131	4.91299	0.02336
10000000	4.89526	4.89895	4.90264	0.00738
100000000	4.89794	4.89911	4.90028	0.00233

Figura B.2: Aproximaciones mediante Monte-Carlo a la integral doble.

**Ejemplo** Aproxime el valor de la integral

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 2^{-7} \left(\sum_{i=1}^8 x_i\right)^2 dx_1 dx_2 \dots dx_8$$

Empleando el algoritmo que se dio para una dimensión se generó la tabla siguiente, los intervalos son al 95 % y los resultados están redondeados a 6 decimales.

El valor verdadero es  $\frac{25}{192}$ , el cual con 6 decimales de precisión es 0.130208. En la tabla claramente se puede observar el patrón del orden de convergencia, característico del método Monte Carlo.

$M$	Lím. Inf.	Aprox.	Lím. Sup.	Long. Int.
100	0.118581	0.128523	0.138465	0.019884
1000	0.126927	0.130067	0.133207	0.006280
10000	0.129007	0.129999	0.130991	0.001984
100000	0.129975	0.130295	0.130616	0.000641
1000000	0.130027	0.130128	0.130229	0.000202
10000000	0.130173	0.130205	0.130237	0.000064

Figura B.3: Aproximaciones mediante Monte-Carlo a una integral múltiple.



# Bibliografía

- [1] Black, F. y Scholes, M. (1973), “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, *Journal of Political Economy*.
- [2] Dufresne, D. (2000), “Laguerre Series for Asian and Other Options”, *Mathematical Finance*, 10, 407-428.
- [3] Geman, H. y Yor. M. (1993), “Bessel Processes, Asian Options and Perpetuities”, *Mathematical Finance*, 3, 349-375.
- [4] Glasserman P. *Monte-Carlo Methods in Financial Engineering*. Computational Finance. Springer Verlag. 2004.
- [5] Hull J. *Options, Futures and other Derivatives*. Prentice Hall. Cuarta edición. 2000.
- [6] Ingersoll, J.E. Jr. *Option Pricing Theory, Finance: The new Palgrave*, (Eatwell, J., Milgate, M. y Newman P. eds.) W.W. Norton, 1989.
- [7] Kemna, A.G.Z. y Vorst, A.C.F. (1990), “A pricing method for options based on average asset values”. *J. Banking Finance* 14.
- [8] Kloeden P. y Platten E. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer Verlag. 1995.
- [9] Knuth. *The Art of Computer Programming*. Vol. 2. Addison-Wesley. 1969.
- [10] Lamberton, D. y Lapeyre, B. *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*. Chapman & Hall. 1996.
- [11] Lapeyre, B. y Temam, E. (2001), “Competitive Monte Carlo methods for the Pricing of Asian Options”. *Journal of Computational Finance*, 5-1.
- [12] Law M. A. M. y Kelton W. D., *Simulation Modeling and Analysis*. Mc. Graw-Hill. 1991.
- [13] Linetsky, V. (2003), “Spectral Expansions for Asian (Average Price) Options”. *Operations Research*.
- [14] Ross S. *Simulation*. Prentice Hall. Segunda edición. 1997.

- [15] Shreve S. *Stochastic Calculus for Finance II*. Springer Finance. 2000.
- [16] Wilmot, P; Howison, S. y Dewynne, J., *Options Pricing: Mathematical Models and Computation*. Oxford Financial Press. 1993.